

# Теория $\varphi^4$ в режиме сильной связи

И.М.Суслов

Институт физических проблем им.  
П.Л.Капицы РАН

# Теория $\varphi^4$

Действие теории  $\varphi^4$

$$S\{\varphi\} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \tau \varphi^2 + g \varphi^4 \right]$$

есть просто эффективный гамильтониан Ландау для теории фазовых переходов:

$d$  — размерность пространства

$\varphi$  —  $n$ -компонентный вектор

# Физические приложения

## 1. Теория фазовых переходов:

$$\tau \sim T - T_c$$

## 2. При $d=4$ – релятивистские бозоны с точечным взаимодействием:

$$\tau = m^2, \text{ где } m \text{ – масса частицы}$$
$$g \text{ – константа взаимодействия}$$

## 3. Теория неупорядоченных систем:

$$\tau = -E, \text{ где } E \text{ – энергия, отсчитанная от края зоны}$$
$$g = -W^2, \text{ где } W \text{ – амплитуда случайного потенциала}$$

## 4. При $n=0$ – теория полимеров

# Функциональные интегралы

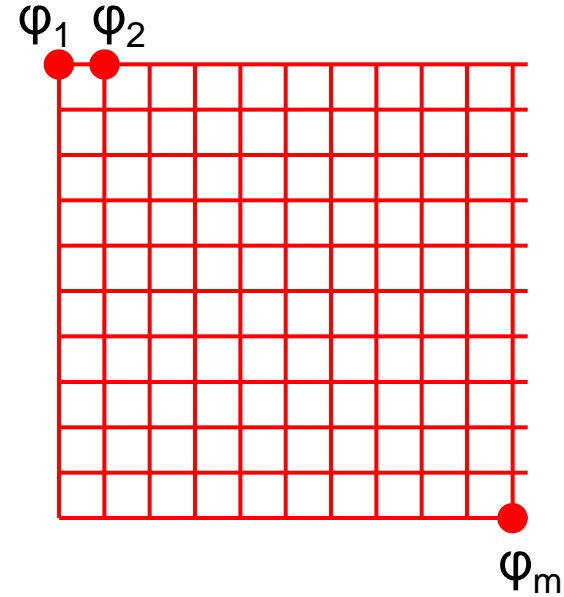
Интеграл

$$Z = \int D\varphi \exp \left[ -S\{\varphi\} \right]$$

есть просто сокращенная запись для

$$Z = \int d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_m \exp \left[ -S\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \right]$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Для фазовых переходов  
 $\varphi(x)$  – параметр порядка.

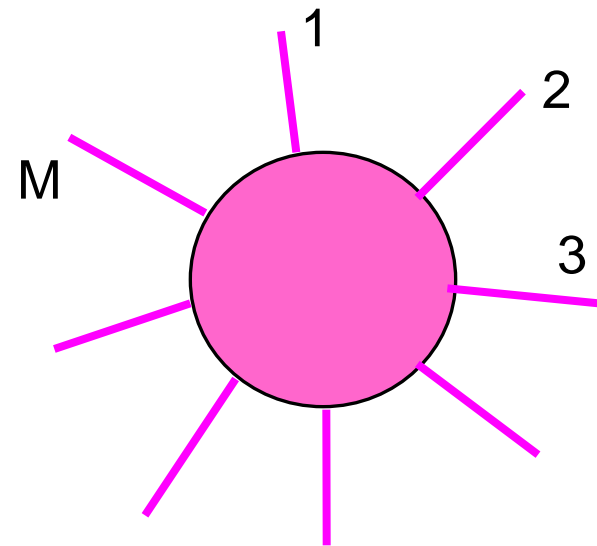


## Связь с физическими величинами

$$Z_M(x_1, \dots, x_M) = \int D\varphi \, \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_M) \exp \left[ i S\{\varphi\} \right]$$

$$G_M(x_1, \dots, x_M) = \frac{Z_M(x_1, \dots, x_M)}{Z_0}$$

где  $G_M$  – M-точечная функция  
Грина





# Метод теоретико-полевой ренормгруппы в теории критических явлений

Функционал Ландау:

$$H\{\varphi\} = \int d^d x \{ (\nabla\varphi)^2 + \tau \varphi^2 + g\varphi^4 \}, \quad \tau \sim (T-T_c)$$

Во флуктуационной области

$$P\{\varphi\} \sim \exp(-H\{\varphi\})$$

и возникают нетривиальные критические индексы

$$C \sim |\tau|^{-\alpha}, \quad \varphi \sim |\tau|^\beta, \quad \chi \sim |\tau|^{-\gamma}, \quad \xi \sim |\tau|^{-\nu} \quad \text{и т.д.}$$

Для фурье-образа парного коррелятора  $G(r-r') = \langle \varphi(r)\varphi(r') \rangle$

$$G(0,\tau) \sim |\tau|^{-\gamma}, \quad G(k,0) \sim k^{-2+\eta}$$

## Расходимости в КЭД

- Лагранжиан КЭД:  $e_0, m_0, \Lambda$  (  $|k| < \Lambda$  )
- Для наблюдаемых величин:

$$A_{\text{obs}} = F( e_0, m_0, \Lambda )$$



# Расходимости в КЭД

- Лагранжиан КЭД:  $e_0, m_0, \Lambda$  ( $|k| < \Lambda$ )
- Для наблюдаемых величин:

$$A_{\text{obs}} = F(e_0, m_0, \Lambda) = F_R(e, m)$$

R.Feynman  
J.Schwinger,  
S.Tomanaga

# Расходимости в КЭД

- Лагранжиан КЭД:  $e_0, m_0, \Lambda$  ( $|k| < \Lambda$ )
- Для наблюдаемых величин:

$$A_{\text{obs}} = F(e_0, m_0, \Lambda) = F_R(e, m)$$

R.Feynman  
J.Schwinger,  
S.Tomanaga

Вакуум

$$\varepsilon_0(k) = k^2/2m_0$$

$$V_0(r) = e_0^2/r$$

Твердое тело

$$\varepsilon(k) = k^2/2m$$

$$V(r) = \begin{cases} e_0^2/\varepsilon r \\ (e_0^2/r) \exp(-\lambda r) \end{cases} = e^2(r)/r$$

Идеальный вакуум

Физический вакуум

## Уравнение Гелл-Манна - Лоу

$$\frac{d g_0}{d \ln \Lambda} = \beta(g_0),$$

$$g_0 = e_0^2$$

# Уравнение Каллана-Симанчика

Мультипликативная перенормировка:

$$F(g_0, m_0, \Lambda) = Z(g_0, m_0, \Lambda) F_R(g, m) \quad g = e^2$$

Ренормировочная инвариантность:

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} F_R(g, m) = 0$$

откуда

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial \ln g_0} + \mu(g_0) \frac{\partial}{\partial \ln m_0^2} + \gamma(g_0) \right\} F(g_0, m_0, \Lambda) = 0$$

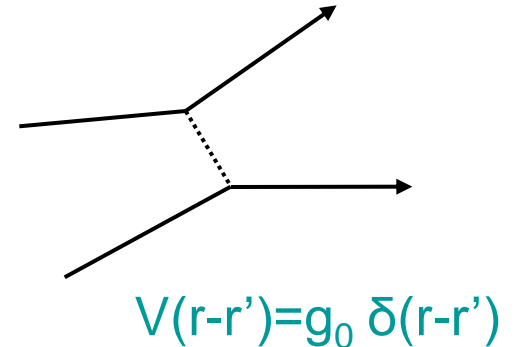
$\beta(g_0)$  – функция Гелл-Манна - Лоу  
 $\mu(g_0), \gamma(g_0)$  – аномальные размерности } — РГ- функции

## Приложение к критическим явлениям

Функционал Ландау эквивалентен действию теории  $\phi^4$ :

$$S\{\phi\} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + m_0^2 \phi^2 + g_0 \phi^4 \right]$$

$$\xrightarrow{m_0^2}$$



Для коррелятора  $G(r-r') = \langle \phi(r) \phi(r') \rangle$  в импульсном представлении

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial \ln g_0} + \mu(g_0) \frac{\partial}{\partial \ln \tau} + \eta(g_0) \right\} G(k; g_0, \tau, \Lambda) = 0$$

где сделана замена  $m_0^2 \rightarrow \tau$ .

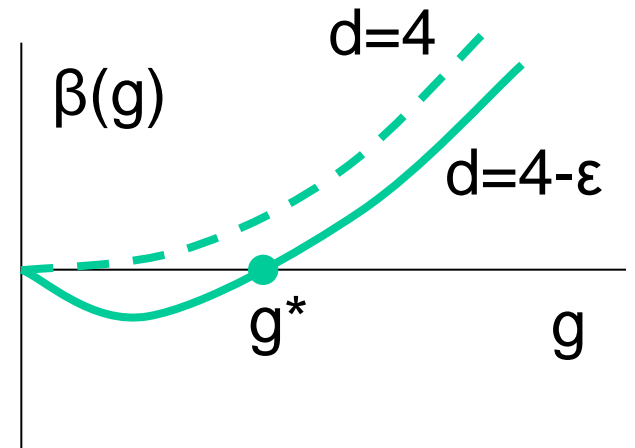
## Характеристики

$$\frac{d \ln \Lambda}{1} = \frac{d g_0}{\beta(g_0)} = \frac{d \ln \tau}{\mu(g_0)} = - \frac{d G}{\eta(g_0) G}$$

## Уравнение Гелл-Манна – Лоу

$$\frac{d g_0}{d \ln \Lambda} = \beta(g_0)$$

так что  $g_0 \rightarrow g^*$  при  $L \rightarrow \infty$  .



## Общее решение

$$G = \Lambda^{-\eta(g^*)} f \left( \frac{\tau}{\Lambda^{\mu(g^*)}} \right)$$

Сопоставляя с результатами размерного анализа

$$G(k, \tau) = \frac{1}{\Lambda^2} F\left(\frac{k}{\Lambda}, \frac{\tau}{\Lambda^2}\right)$$

имеем

$$G(0, \tau) \sim \tau^{-\gamma}, \quad G(k, 0) \sim k^{-2+\eta}$$

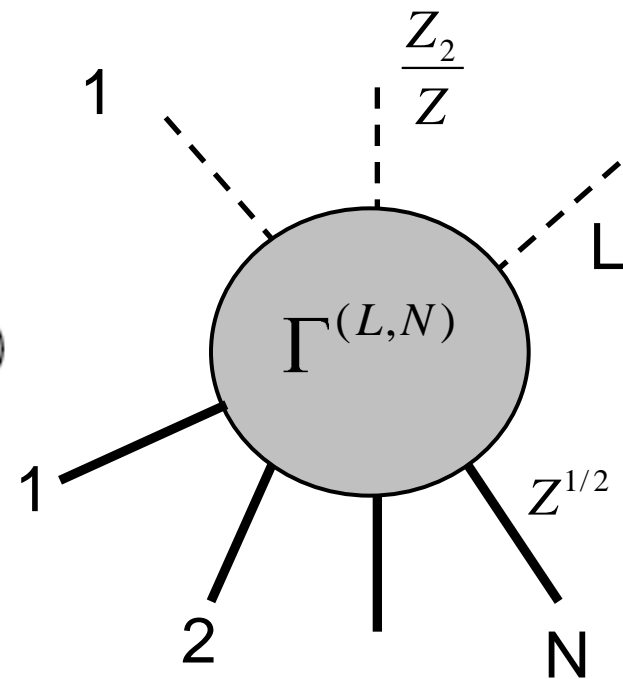
где

$$\eta = \eta(g^*), \quad \gamma = \frac{2 - \eta(g^*)}{2 - \mu(g^*)}$$

т.е. значения аномальных размерностей при  $g=g^*$  определяют два независимых критических индекса.

## Другое определение РГ функций

$$\Gamma^{(L,N)}(p_i; g_0, m_0, \Lambda) = Z^{-N/2} \left( \frac{Z_2}{Z} \right)^{-L} \Gamma_R^{(L,N)}(p_i; g, m)$$



$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln m} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + (L - N/2) \eta(g) - L \eta_2(g) \right] \Gamma_R^{(L,N)} \approx 0$$

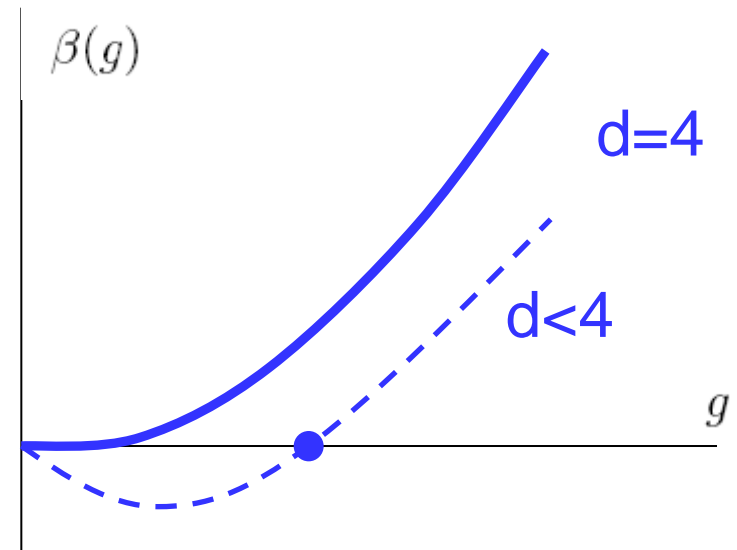
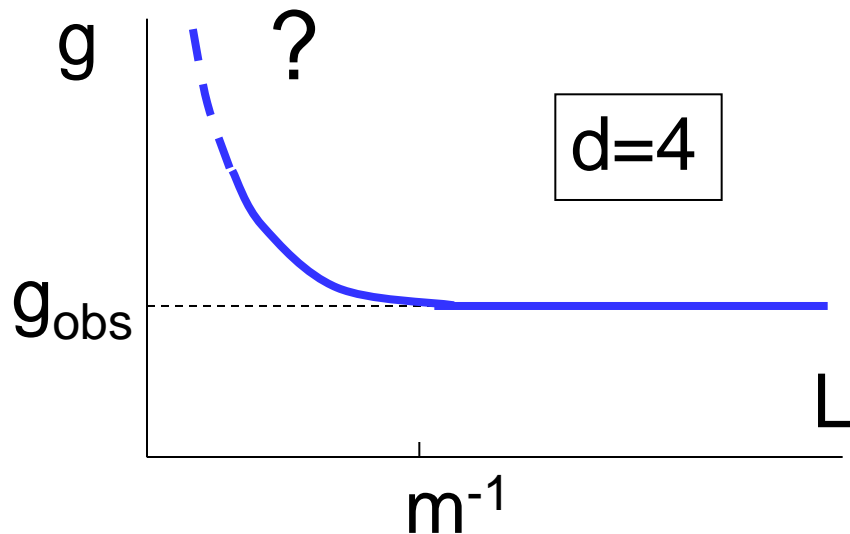
$$\beta(g) = \left. \frac{dg}{d \ln m} \right|_{g_0, \Lambda = \text{const}}, \quad \eta(g) = \left. \frac{d \ln Z}{d \ln m} \right|_{g_0, \Lambda = \text{const}}, \quad \eta_2(g) = \left. \frac{d \ln Z_2}{d \ln m} \right|_{g_0, \Lambda = \text{const}}$$

$$\eta = \eta(g^*), \quad v^{-1} = 2 + \eta_2(g^*) - \eta(g^*)$$



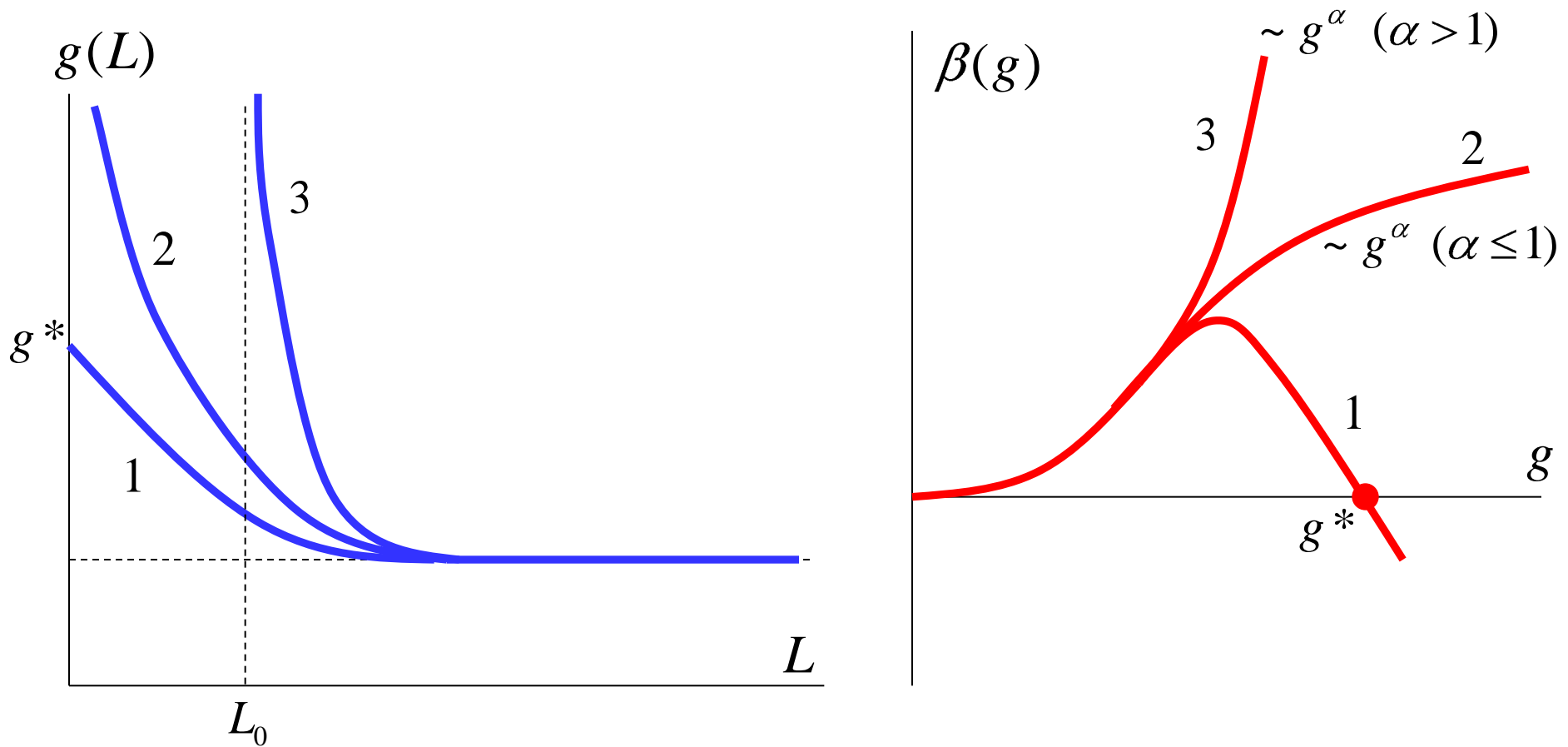
## Релятивистские теории на малых расстояниях

$$-\frac{d g}{d \ln L} = \beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \dots$$



# Классификация Боголюбова и Ширкова

$$-\frac{d g}{d \ln L} = \beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \dots$$



## Разложения РГ функций теории $\phi^4$ для $d=3, n=2$

$$\beta(g) = -g + g^2 - 0.402962963g^3 + 0.314916942g^4 - \\ -0.31792848g^5 + 0.3911025g^6 - 0.552449g^7 + \\ \dots + ca^N \Gamma(N+b)g^N + \dots,$$

$$\eta(g) = (8/675)g^2 + 0.0009873600g^3 + 0.0018368107g^4 - \\ -0.0005863264g^5 + 0.0012513930g^6 - 0.001395129g^7 + \\ \dots + c'a^N \Gamma(N+b')g^N + \dots,$$

$$\eta_2(g) = -(2/5)g + (2/25)g^2 - 0.0495134446g^3 + \\ +0.0407881055g^4 - 0.0437619509g^5 + 0.0555575703g^6 \\ -0.08041336g^7 + \dots + c''a^N \Gamma(N+b)g^N + \dots,$$

где

$$a = 0.132996798, \quad b = b' + 1 = 5,$$

$$c = 0.016302, \quad c' = 0.0008798, \quad c'' = 0.0030836.$$



# Асимптотика РГ функций в области сильной связи

Имеется три РГ функции

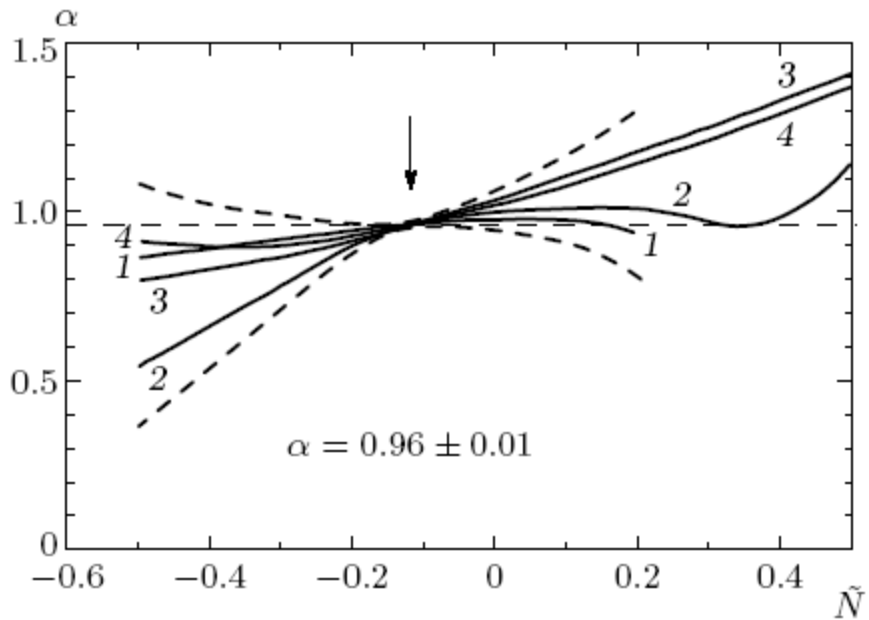
$$\beta(g) , \quad \eta(g) , \quad \eta_2(g) ,$$

используемые при вычислении критических  
индексов

$$\beta(g^*) = 0$$

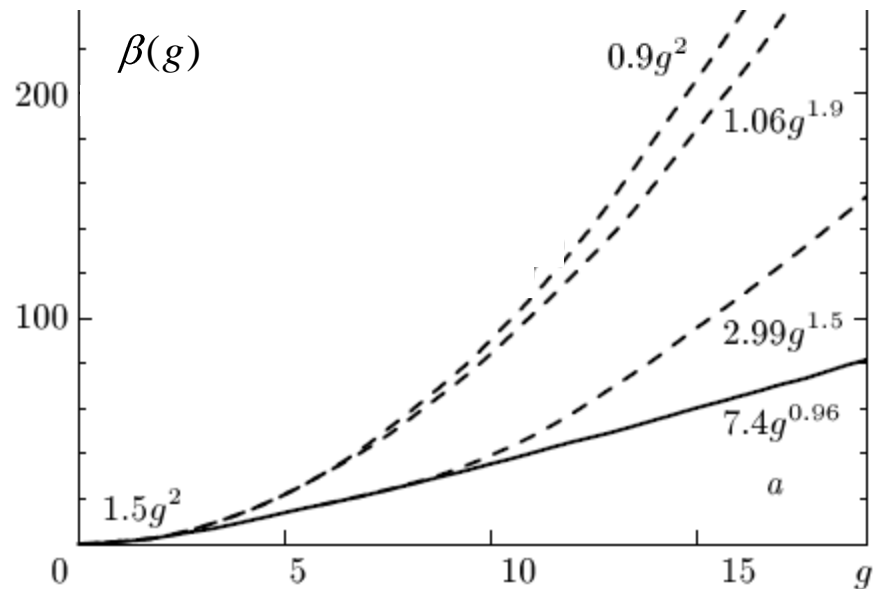
$$\eta = \eta(g^*) ,$$

$$\nu^{-1} = 2 - \eta(g^*) + \eta_2(g^*)$$



$d=4$

И.М.Суслов,  
ЖЭТФ 120, 5 (2001)

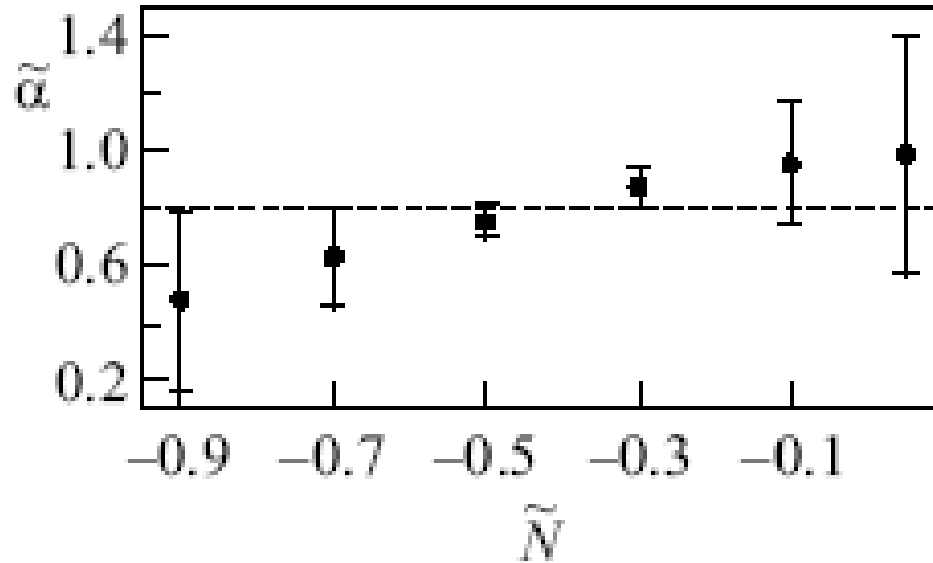


Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ  
**38**, 15 (1979).

Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).

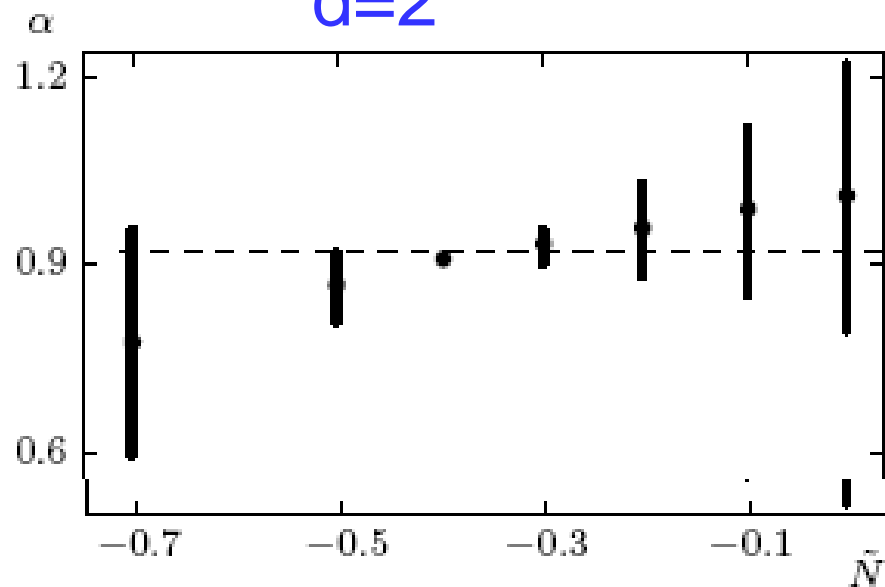
A. N. Sissakian et al., Phys. Lett. B **321**, 381 (1994).

$d=3$  ( $n=2$ )



Другие  
размерности

$d=2$



А.А.Погорелов,  
И.М. Суслов,  
ЖЭТФ 132, 406 (2007);  
Письма в ЖЭТФ 86, 41  
(2007)



## Функциональные интегралы

$$Z_{\alpha_1 \dots \alpha_M}^{(M)}(x_1, \dots, x_M) = \int D\varphi \varphi_{\alpha_1}(x_1) \varphi_{\alpha_2}(x_2) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) \exp(-S\{\varphi\})$$

$$S\{\varphi\} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{1}{8} u \varphi^4 \right]$$

$$u = g_0 \Lambda^\varepsilon, \quad \varepsilon = 4 - d$$

где  $\varphi$  —  $n$ -компонентный вектор

$$Z_{\alpha_1 \dots \alpha_M}^{(M)}\{p_i\} = K_M\{p_i\} I_{\alpha_1 \dots \alpha_M} N \delta_{p_1 + \dots + p_M}$$

где  $I_{\alpha_1 \dots \alpha_M}$  есть сумма членов вида  $\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \dots$  со всевозможными спариваниями

$$K_2(p) = K_2 - \tilde{K}_2 p^2 + \dots$$

## Параметрическое представление

$$g = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2},$$

$$\beta(g) = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2} \left\{ d + 2 \frac{K'_4/K_4 + K'_0/K_0 - 2K'_2/K_2}{K'_2/K_2 - \tilde{K}'_2/\tilde{K}_2} \right\},$$

$$\eta(g) = - \frac{2K_2 \tilde{K}_2}{K_2 \tilde{K}'_2 - K'_2 \tilde{K}_2} \left[ 2 \frac{K'_2}{K_2} - \frac{K'_0}{K_0} - \frac{\tilde{K}'_2}{\tilde{K}_2} \right],$$

$$\eta_2(g) = \frac{2K_2 \tilde{K}_2}{K_2 \tilde{K}'_2 - K'_2 \tilde{K}_2} \left\{ \frac{K''_0 K_2 - K_0 K''_2}{K'_0 K_2 - K_0 K'_2} - 2 \frac{K'_2}{K_2} \right\},$$

где штрихом отмечаются производные по  $m_0^2$

При  $\tilde{K}_2 \rightarrow 0$  имеем

$$g = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2} \qquad \beta(g) = -d \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2} ,$$

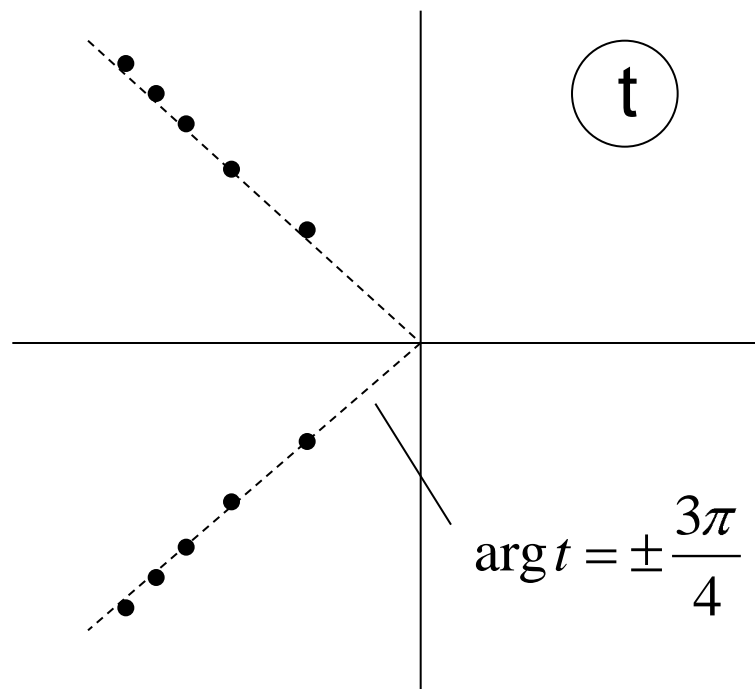
$$\eta(g) \rightarrow 2 , \qquad \eta_2(g) \rightarrow 0$$

и параметрическое представление разрешается в виде

$$\beta(g) = dg , \qquad \eta(g) = 2 , \qquad \eta_2(g) = 0 \qquad (g \rightarrow \infty)$$

Нули интегралов в плоскости  $t=(1/g_0)^{1/2}$

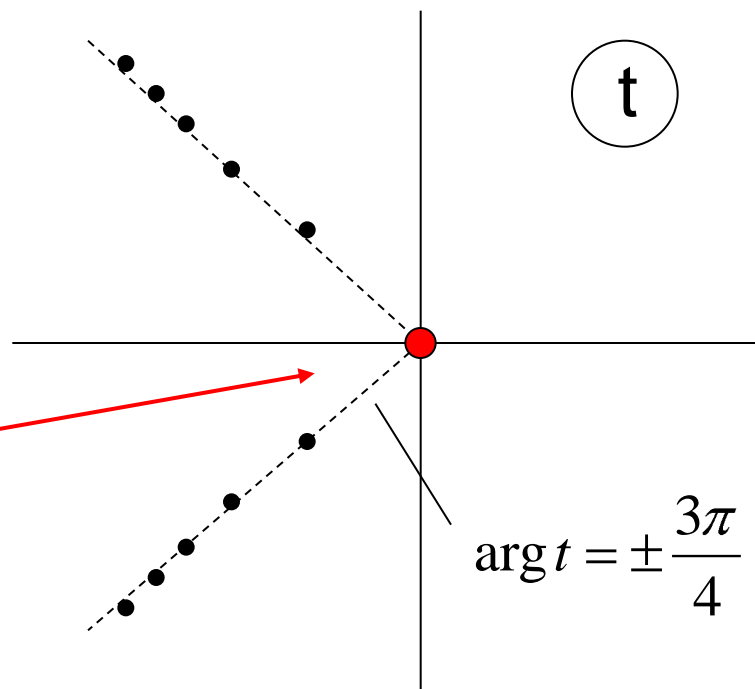
(  $g_0$  – затравочный заряд )



Нули интегралов в плоскости  $t=(1/g_0)^{1/2}$

(  $g_0$  – затравочный заряд )

Имеется  
сингулярность  
при  $t=0$  !



## Решеточное представление

$$S\{\varphi\} = \frac{1}{2}a^d \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} + \frac{1}{2}m_0^2 a^d \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{4}g_0 a^{2d-4} \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi \left( g_0 a^{2d-4} / 4 \right)^{-1/4} \qquad t = (1/g_0)^{1/2}$$

$$Z_M\{\mathbf{x}_i\} = (2t)^{\frac{N+M}{2}} \int \left( \prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}} \right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \dots \varphi_{\mathbf{x}_M} \exp \left\{ -t \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} - t m_0^2 \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4 \right\}$$

$$[\nabla \varphi(x)]^2 = \varphi(x) \hat{p}^2 \varphi(x) \longrightarrow \varphi(x) \epsilon(\hat{p}) \varphi(x) = \sum_{\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'}$$

где  $\hat{p}$  — оператор импульса,  $\epsilon(p)$  — затравочный спектр

$$\epsilon(p) = \sum_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \epsilon(0) + p^2 + O(p^4)$$

Сингулярности при  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ , возникают в точках фазовых переходов, когда

$$m^2 = 0, \quad \xi = \infty$$

и реально требуется термодинамический предел  $\mathcal{L} \rightarrow \infty$

При  $m^2 \neq 0$  достаточно обеспечить условие

$$\mathcal{L} \gg \xi \gg a$$

чтобы функциональный интеграл хорошо аппроксимировался своим конечномерным аналогом

## Сингулярность при $t=0$

$$Z_2\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = (2t)^{\frac{N+2}{2}} \int \left( \prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}} \right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \varphi_{\mathbf{x}_2} \exp \left\{ -t \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} - tm_0^2 \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4 \right\}$$

В нулевом по  $t$  приближении имеем

$$Z_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sim \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$$

и фурье-образ не имеет импульсной зависимости. Ввиду определения

$$K_2(p) = K_2 - \tilde{K}_2 p^2 + \dots$$

имеем

$$\frac{K_2}{\tilde{K}_2} \sim \frac{1}{t}$$



# Решеточные разложения

При разложении интеграла по градиентному члену

$$Z_M\{\mathbf{x}_i\} = (2t)^{\frac{N+M}{2}} \int \left( \prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}} \right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \dots \varphi_{\mathbf{x}_M} \exp \left\{ -t \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} - tm_0^2 \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4 \right\}$$

возникают средние от произведения  $\varphi_{\mathbf{x}_1} \varphi_{\mathbf{x}_2} \dots$  по распределению

$$P\{\varphi\} \sim \prod_{\mathbf{x}} \exp \left\{ -tm_0^2 \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \varphi_{\mathbf{x}}^4 \right\}$$

которые расписываются по схеме

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\mathbf{x}_1} \varphi_{\mathbf{x}_2} \varphi_{\mathbf{x}_3} \varphi_{\mathbf{x}_4} \rangle &= \langle \varphi_{\mathbf{x}_1}^2 \rangle \langle \varphi_{\mathbf{x}_3}^2 \rangle \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} \delta_{\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4} (1 - \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3}) + \langle \varphi_{\mathbf{x}_1}^2 \rangle \langle \varphi_{\mathbf{x}_2}^2 \rangle \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3} \delta_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4} (1 - \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}) + \\ &\quad + \langle \varphi_{\mathbf{x}_1}^2 \rangle \langle \varphi_{\mathbf{x}_2}^2 \rangle \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4} \delta_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3} (1 - \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}) + \langle \varphi_{\mathbf{x}_1}^4 \rangle \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3} \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4} = \\ &= \langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^2 \rangle (\delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} \delta_{\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4} + \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3} \delta_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4} + \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4} \delta_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3}) + [\langle \varphi^4 \rangle - 3 \langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^2 \rangle] \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3} \delta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4}, \end{aligned}$$

где

$$\langle \varphi^{2k} \rangle = \frac{I_{2k}}{I_0}, \quad I_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \varphi^{2k} \exp \left\{ -tm_0^2 \varphi^2 - \varphi^4 \right\}$$

Параметрическое представление принимает вид

$$g = \left( \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} \right)^{d/2} \left( 1 - \frac{n}{n+2} \frac{I_4 I_0}{I_2^2} \right),$$

$$\beta(g) = \left( \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} \right)^{d/2} \left\{ d + 2 \frac{\frac{I_6 I_2}{I_0^2} - \frac{2I_4^2}{I_0^2} + \frac{I_2^2 I_4}{I_0^3}}{\left( \frac{I_4}{I_0} - \frac{n+2}{n} \frac{I_2^2}{I_0^2} \right) \left( \frac{I_2^2}{I_0^2} - \frac{I_4}{I_0} \right)} \right\},$$

$$\eta_2(g) = 2 \frac{\frac{I_6 I_2}{I_0^2} - \frac{2I_4^2}{I_0^2} + \frac{I_2^2 I_4}{I_0^3}}{\left( \frac{I_2^2}{I_0^2} - \frac{I_4}{I_0} \right)^2}, \quad \eta(g) = 0.$$

где в  $n$ -компонентном случае

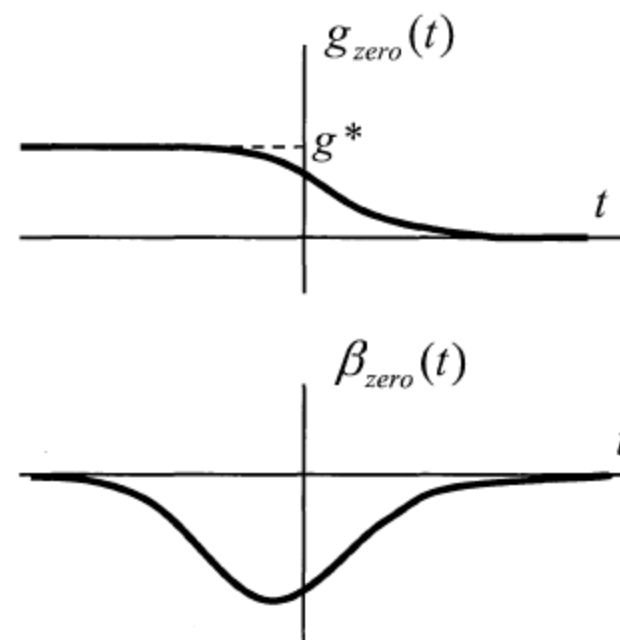
$$I_{2k} = \int_0^\infty d\varphi \varphi^{n-1+2k} \exp \left\{ -tm_0^2 \varphi^2 - \varphi^4 \right\}$$

## В компактной форме

$$g = \left( \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} \right)^{d/2} g_{zero}(tm_0^2),$$

$$\beta(g) = \left( \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} \right)^{d/2} \left[ dg_{zero}(tm_0^2) + \beta_{zero}(tm_0^2) \right],$$

$$\eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(tm_0^2)}{g^* - g_{zero}(tm_0^2)}, \quad \eta(g) = 0$$



Разрешая в пределе  $t \rightarrow 0$

$$\beta(g) = \left[ d + \frac{\beta_{zero}(0)}{g_{zero}(0)} \right] g, \quad \eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(0)}{g^* - g_{zero}(0)}, \quad \eta(g) = 0 \quad (g \rightarrow \infty)$$

# Проблема правильного предельного перехода

Связь затравочной и перенормированной массы дается рядом теории возмущений

$$m^2 = m_0^2 + \Sigma(0, m_0)$$

$$\textcircled{\Sigma} = \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\hspace{0.5cm}} \text{---} + \dots$$

структура которого

$$m^2 = m_0^2 + \Lambda^2 (A_1 g_0 + A_2 g_0^2 + \dots)$$

Обычно полагают

$$m_0^2 = m_c^2 + \tau, \quad m_c^2 = -A_1 g_0 \Lambda^2$$

Поэтому предел  $\Lambda \rightarrow \infty$  берется при условии

$$m^2 = \text{const}, \quad -m_0^2 \sim g_0 \Lambda^2 \rightarrow \infty$$

По аналогии такое же условие стали принимать для предела  $g_0 \rightarrow \infty$  (т.н. «изинговский предел»)

## Очевидные дефекты:

- (1) Производится незаконная экстраполяция зависимости  $m_c^2 \propto g_0$  в область сильной связи;
- (2) Уравнение  $m^2 = 0$  в области сильной связи может вообще не иметь решений
- (3) Условие постоянства перенормированной массы не является физически мотивированным

# Интерпретация функциональных интегралов

В общих теоремах предполагается взятый предел  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  
что физически означает

$$m^2 \ll \Lambda^2$$

т.к. в силу

$$\frac{m}{\Lambda} \sim \frac{a}{\xi}$$

это эквивалентно условию

$$\xi \gg a$$

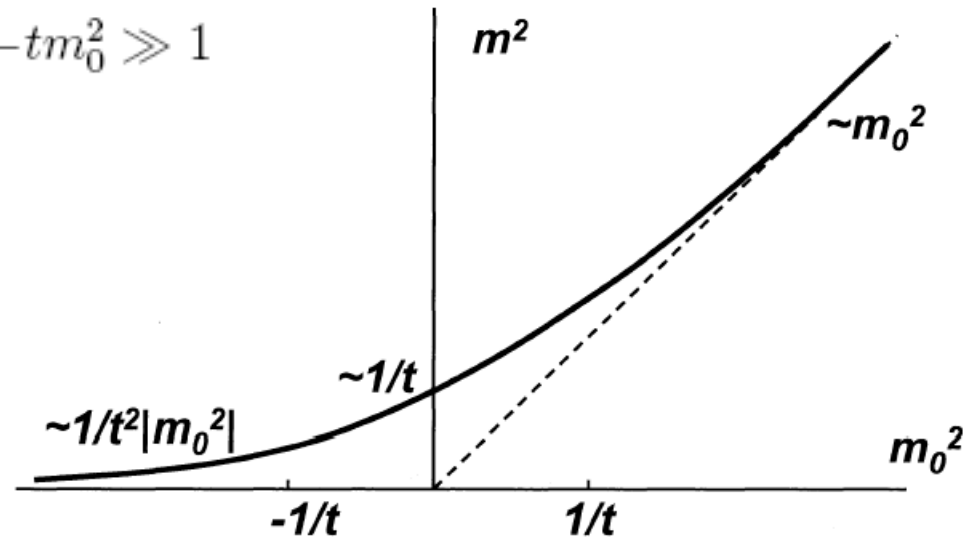
для корреляционного радиуса  $\xi$ .

## Связь перенормированной массы с затравочной в области сильной связи

$$m^2 = \frac{K_2}{\tilde{K}_2} = \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} = \begin{cases} m_0^2, & tm_0^2 \gg 1 \\ \sim 1/t, & |tm_0^2| \lesssim 1 \\ \sim 1/t^2 |m_0^2|, & -tm_0^2 \gg 1 \end{cases}$$

Для выполнения условия  $m^2 \ll 1$  необходимо принять

$$tm_0^2 = -\kappa, \quad \kappa \gg 1$$



## Экспонента в функциональном интеграле

$$\exp \left\{ -t \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} - t m_0^2 \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4 \right\}.$$

после замен

$$t m_0^2 = -\kappa, \quad \varphi_{\mathbf{x}}^2 \rightarrow \kappa \varphi_{\mathbf{x}}^2 / 2$$

преобразуется к виду

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} t \kappa \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} \right\} \prod_{\mathbf{x}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \kappa^2 (2 \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \varphi_{\mathbf{x}}^4) \right\}$$

и ввиду локализации при  $\varphi_{\mathbf{x}}^2 \approx 1$  может быть записана в виде

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} t \kappa \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} \right\} \prod_{\mathbf{x}} A \delta(\varphi_{\mathbf{x}}^2 - 1)$$



Функциональный интеграл принимает вид

$$Z_M\{\mathbf{x}_i\} = (t\kappa)^{\frac{N+M}{2}} \int \left( \prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}} \right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \dots \varphi_{\mathbf{x}_M} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t\kappa \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} \right\} \prod_{\mathbf{x}} \delta(\varphi_{\mathbf{x}}^2 - 1)$$

и зависит от одного параметра  $t\kappa$ , так что РГ функции зависят только от  $g$ .

При физической мотивации предельного перехода мы исходили из условий

$$t \ll 1, \quad \kappa \gg 1, \quad t\kappa \gg 1.$$

но фактически преобразование верно при

$$t \ll 1, \quad \kappa \gg 1, \quad t\kappa - \text{произвольно.}$$

Большие значения  $g$  достигаются в области  $t\kappa \ll 1$  и предел сильной связи соответствует условиям

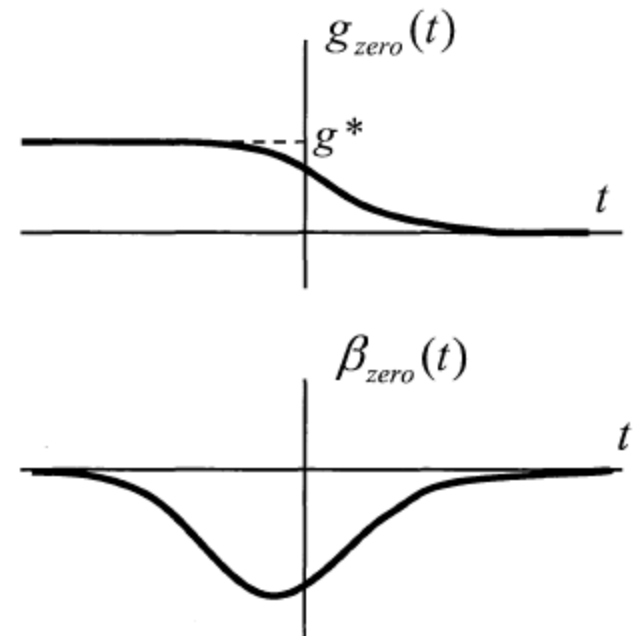
$$t \rightarrow 0, \quad tm_0^2 \rightarrow -\infty, \quad tm^2 \rightarrow 0, \quad m^2 \rightarrow \infty$$

## Параметрическое представление

$$g = \left( \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} \right)^{d/2} g_{zero}(tm_0^2),$$

$$\beta(g) = \left( \frac{n}{2t} \frac{I_0}{I_2} \right)^{d/2} \left[ dg_{zero}(tm_0^2) + \beta_{zero}(tm_0^2) \right],$$

$$\eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(tm_0^2)}{g^* - g_{zero}(tm_0^2)}, \quad \eta(g) = 0$$



при  $tm_0^2 = -\kappa$ ,  $\kappa \gg 1$  имеет вид

$$g = \left( \frac{n}{t\kappa} \right)^{d/2} g^*, \quad \beta(g) = \left( \frac{n}{t\kappa} \right)^{d/2} dg^*, \quad \eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(-\kappa)}{g^* - g_{zero}(-\kappa)} \Big|_{\kappa \rightarrow \infty} = -4$$

что дает результаты для асимптотик

$$\beta(g) = dg, \quad \eta(g) = 0, \quad \eta_2(g) = -4 \quad (g \rightarrow \infty).$$

# Наблюдаемые величины

Наблюдаемые величины получаются в виде

$$A_{obs} = \Lambda^{d_A} f_A(t\kappa)$$

где  $d_A$  – физическая размерность величины  $A_{obs}$ .  
С учетом аналогичных результатов для  $g$  и  $m$

$$g = f_g(t\kappa), \quad m^2 = \Lambda^2 f_m(t\kappa),$$

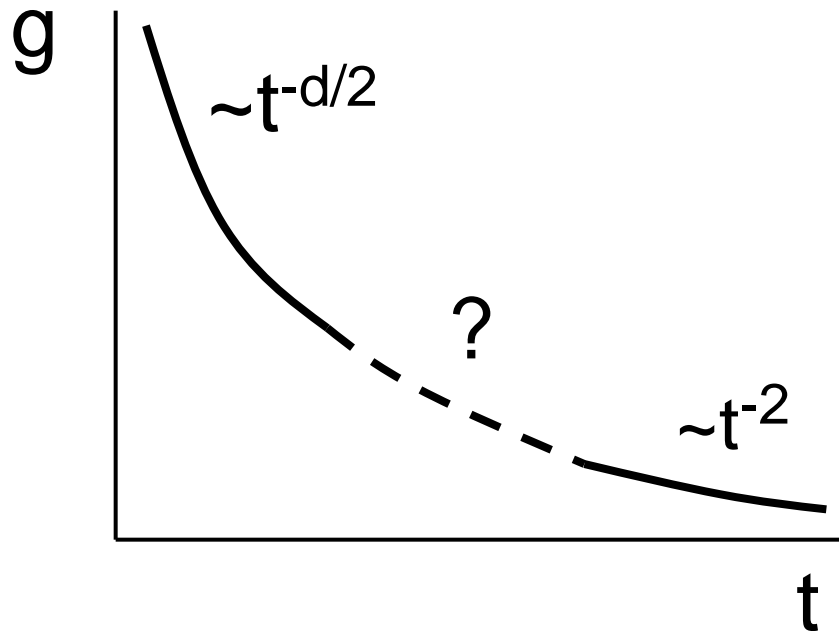
можно записать в виде, не содержащем затравочных параметров  $g_0, m_0, \Lambda$

$$A_{obs} = m^{d_A} F(g)$$

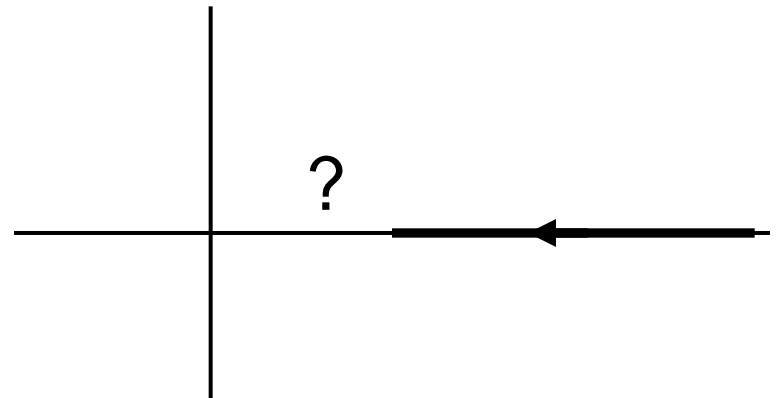
--- «теорема о перенормируемости» для области сильной  
связи

# Топология траекторий в плоскости $t$

Считаем, что бегущий параметр  $t$  движется по непрерывной траектории в комплексной плоскости, вдоль которой соотношение  $g=f(t)$  обеспечивает действительность  $g$  и его монотонное возрастание.

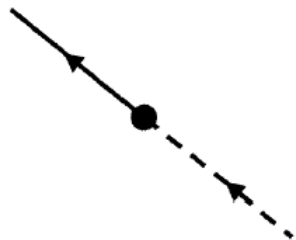


Основной интерес представляет траектория, идущая из  $t=+\infty$



# Прохождение регулярной точки $t_0$

$$f'(t_0) \neq 0$$

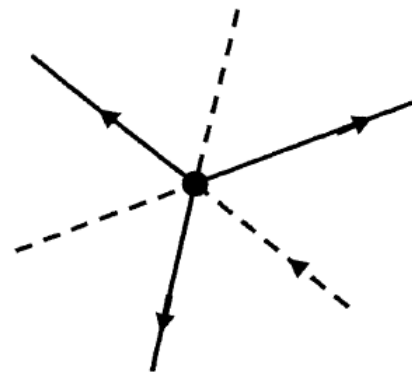
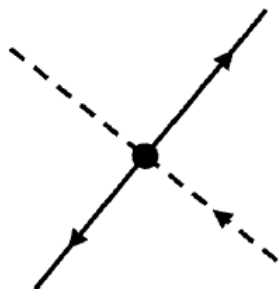


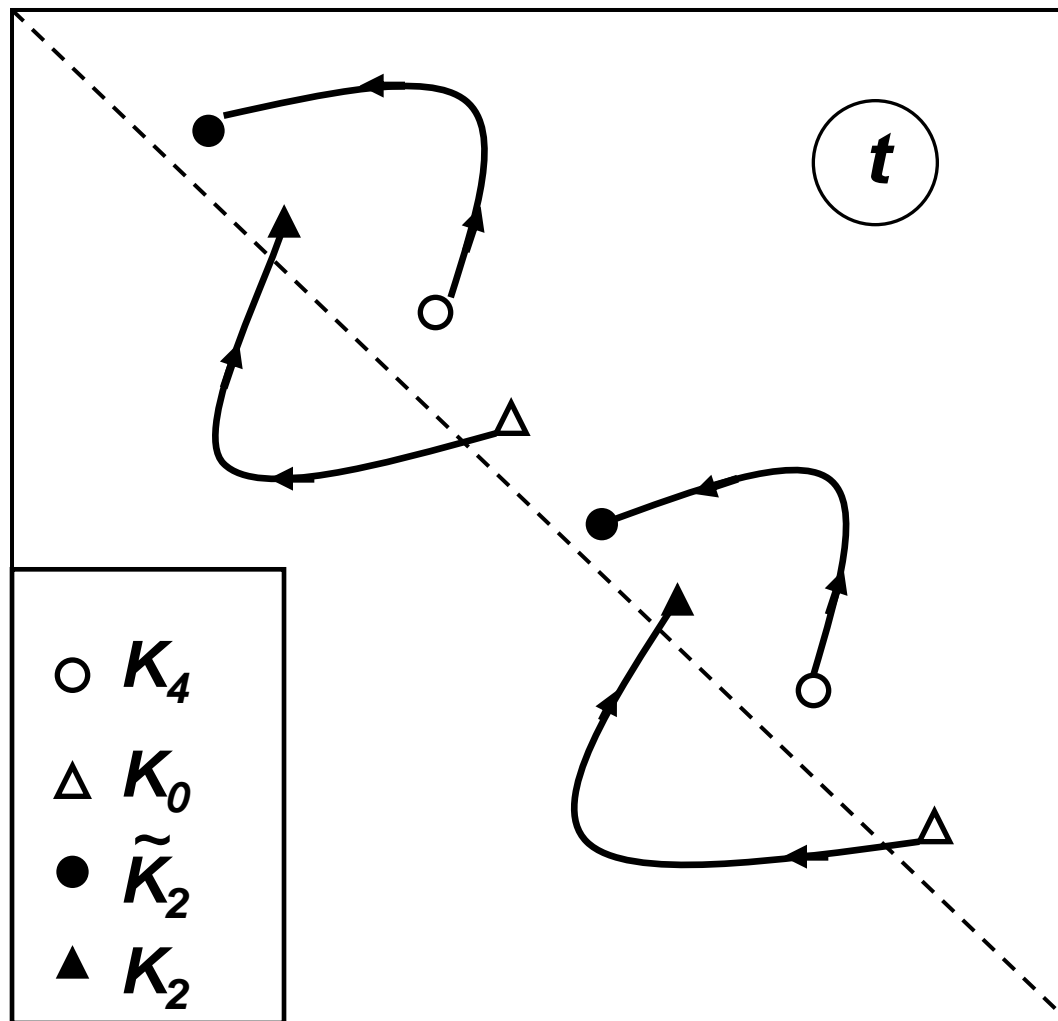
$$f'(t_0) = 0 ,$$

$$f''(t_0) = 0 ,$$

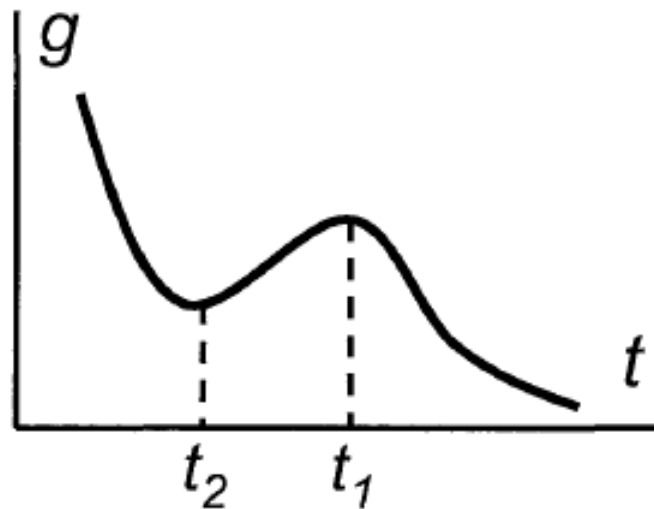
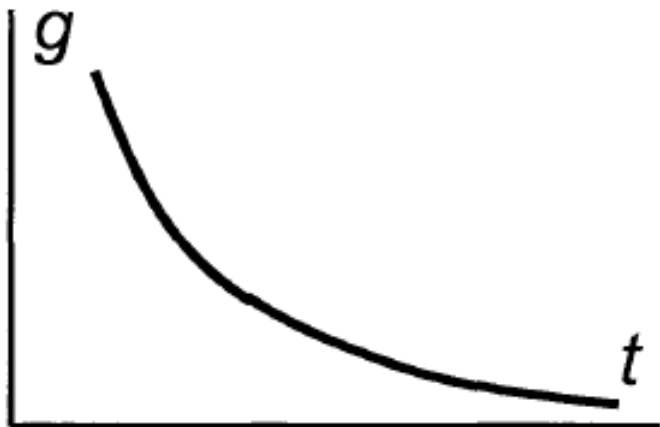
$$f'''(t_0) \neq 0$$

$$f'(t_0) = 0, \quad f''(t_0) \neq 0$$

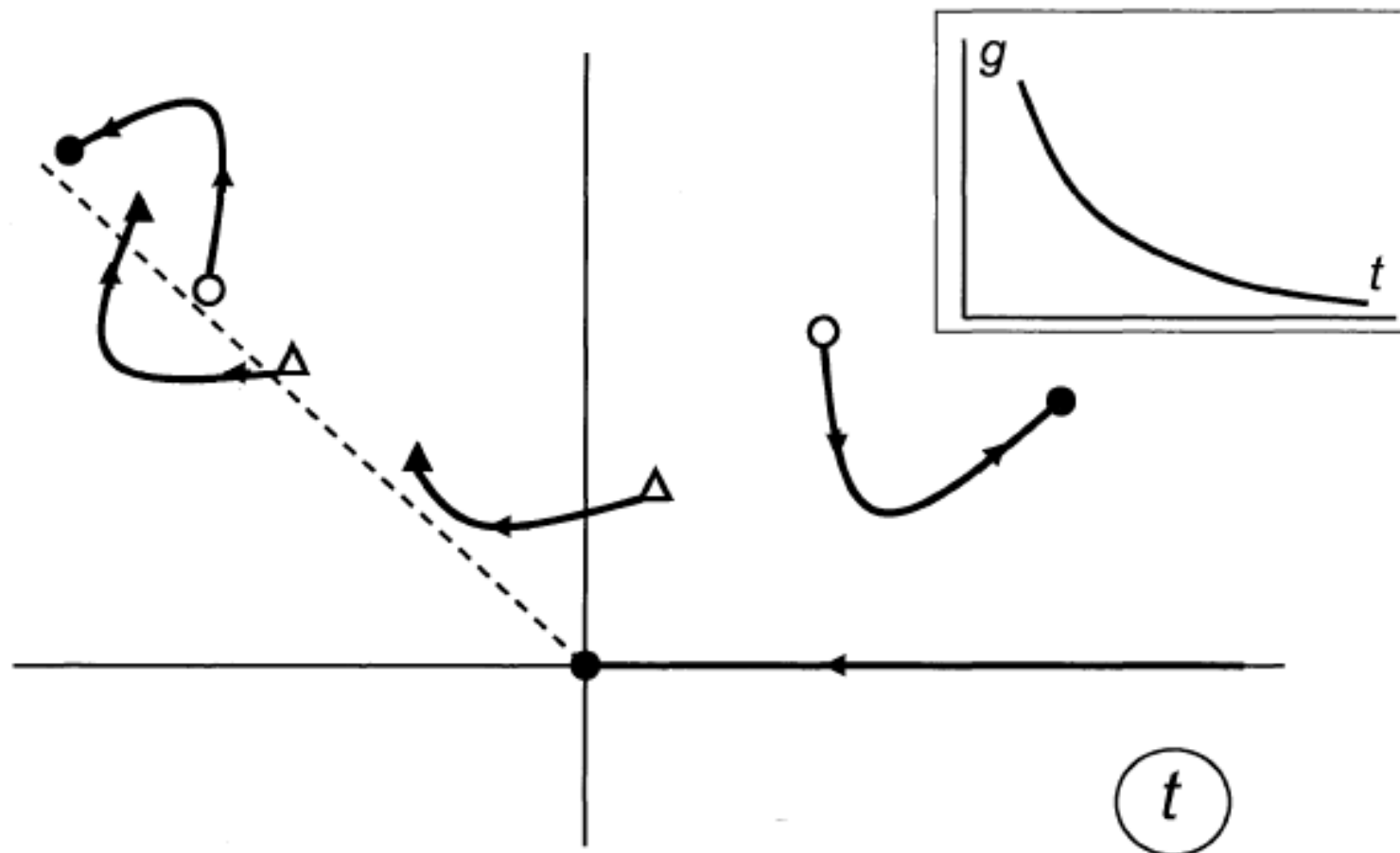




Имеется 2 основных сценария

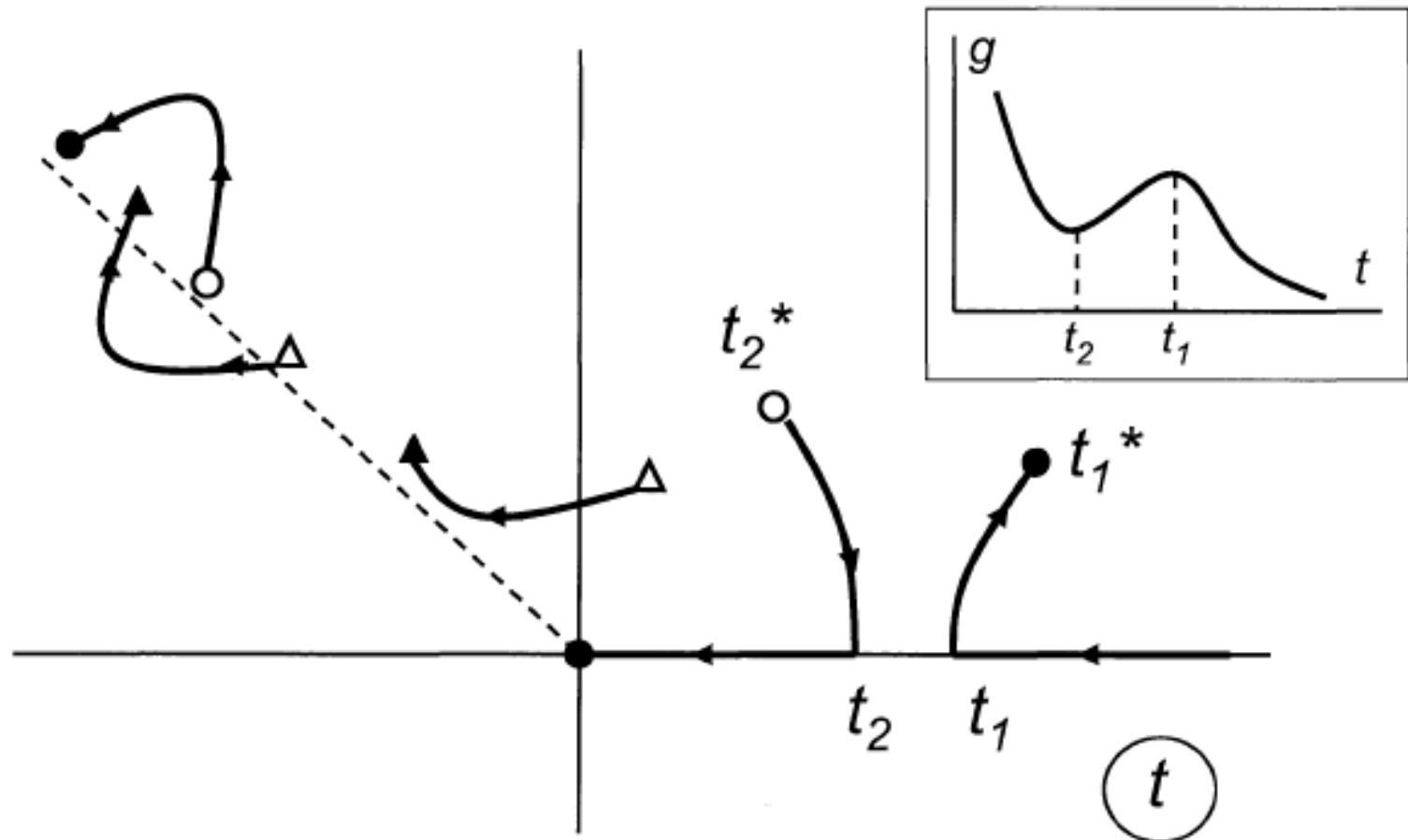


## Первый сценарий

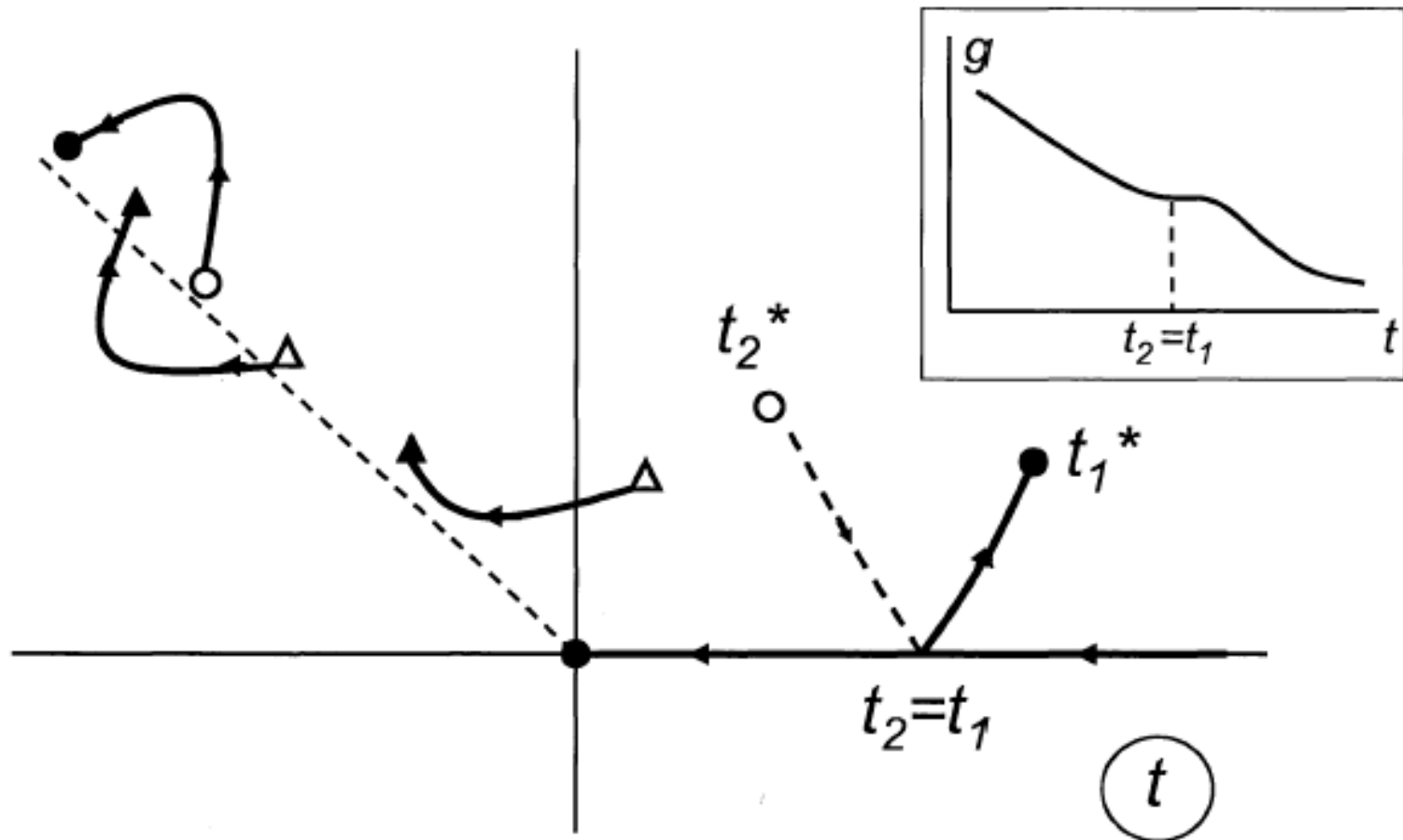




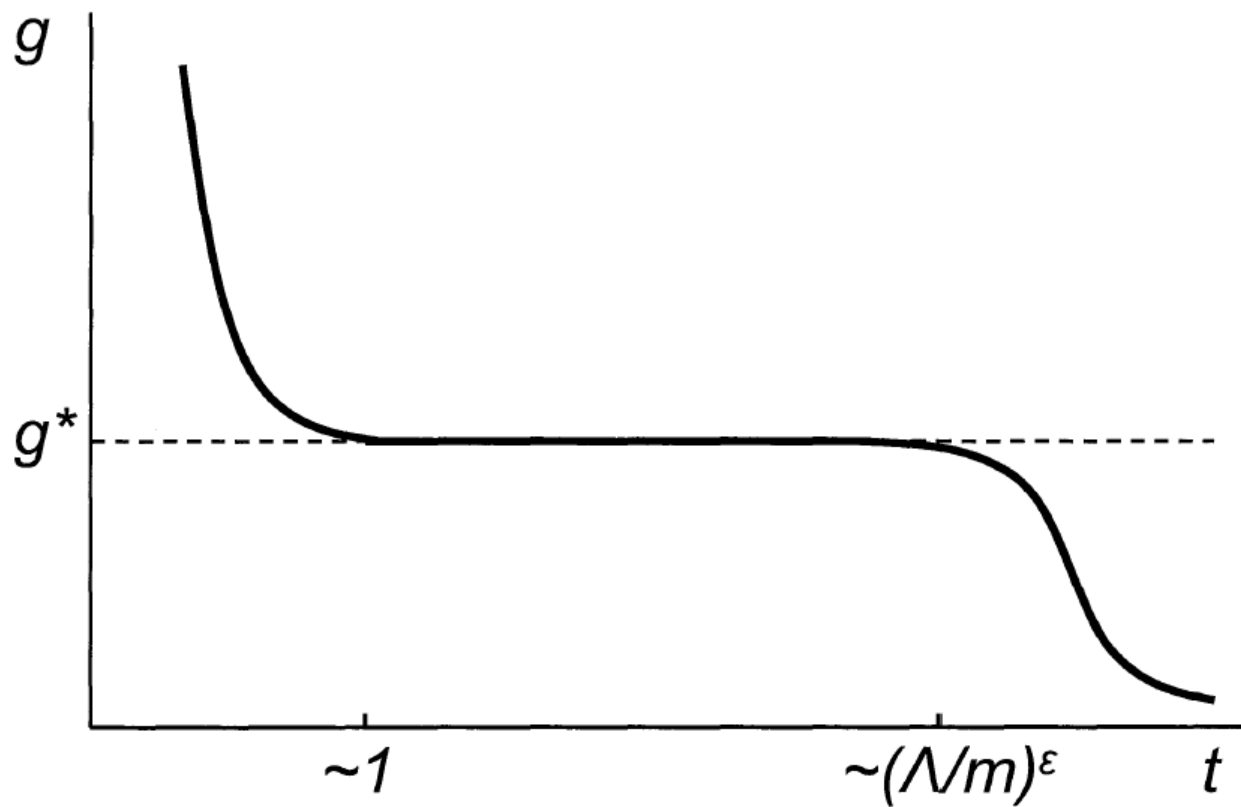
## Второй сценарий



## Маргинальный случай



Реальная ситуация близка к маргинальной



# История вопроса

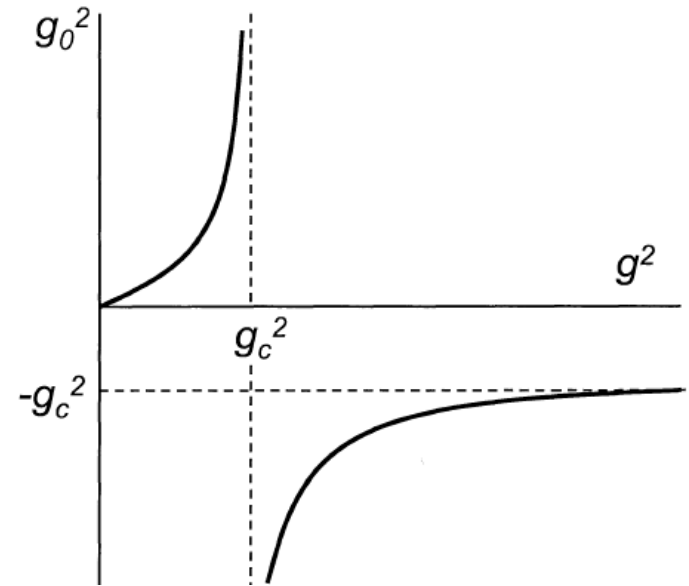
T. D. Lee, Phys. Rev. **95**, 1329 (1954).

Для модели Ли

$$g^2 = \frac{g_0^2}{1 + g_0^2/g_c^2}$$

Ср. с формулой ЛАХ для КЭД

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \beta_2 e_0^2 \ln \Lambda^2/m^2}$$



Согласно работе

G. Källen, W. Pauli, Mat.-Fyz. Medd. **30**, No.7 (1955).

модель Ли физически неудовлетворительна из-за наличия состояний с отрицательной нормой (“ghost states”)

S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory

G. Barton, Introduction to Advanced Field Theory

# Современная ситуация

C. M. Bender, S. F. Brandt, J. - H. Chen, Q. Wang, Phys. Rev. D **71**, 025014 (2005).

Основная идея:

Аналитическое продолжение параметров гамильтониана в комплексную плоскость должно сопровождаться модификацией скалярного произведения

$$(f, g) = \int f^*(x)g(x)dx \quad \longrightarrow \quad (f, g)_G = (f, \hat{G}g)$$

так что  $\hat{H}_B$  эрмитов относительно  $(f, g)_G$ .

При надлежащем выборе  $\hat{G}$  модель Ли становится удовлетворительной

# Аксиоматическая S-матрица Боголюбова

---

По формуле Дайсона

$$S = T \exp \left\{ i \int H(t) dt \right\} T \exp \{ i A_B \}$$

и эрмитовость затравочного гамильтониана  $H$  выглядит принципиальной для унитарности теории.

Согласно Боголюбову, наиболее общий вид S-матрицы,

$$S = T \exp \{ i A \} \quad A = A_B + C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

где  $C_i$  – «постоянные интегрирования».



# Ренормгрупповые функции теории $\phi^4$ из высокотемпературных разложений



## Параметрическое представление для $\beta$ -функции

$$g = F(g_0, m_0, \Lambda), \quad \beta(g) = F_1(g_0, m_0, \Lambda),$$

(  $g_0$  и  $m_0$  – затравочный заряд и масса,  $\Lambda$  – параметр обрезания по импульсу ) при наложении условия

$$m \ll \Lambda \quad \text{или} \quad \xi \gg a$$

сводится к

$$g = F(\kappa), \quad \beta(g) = F_1(\kappa)$$

(  $\kappa$  – обратная температура ) и сохраняется при более слабом условии

$$g_0 \gg 1, \quad -g_0^{-1/2} m_0^2 / \Lambda^2 \gg 1, \quad -g_0^{-1} m_0^2 / \Lambda^2 = \kappa$$

При усилении условия на затравочные параметры

$$g_0 \rightarrow \infty, \quad -g_0^{-1/2} m_0^2 / \Lambda^2 \rightarrow \infty, \quad -g_0^{-1} m_0^2 / \Lambda^2 = \kappa$$

представление

$$g = F(\kappa), \quad \beta(g) = F_1(\kappa)$$

можно считать определением  $\beta$  – функции при произвольных  $g$ .

Но даст ли это правильные результаты в области слабой связи ?

## Параметрическое представление для РГ функций

$$g = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2},$$

$$\beta(g) = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2} \left\{ d + 2 \frac{K'_4/K_4 + K'_0/K_0 - 2K'_2/K_2}{K'_2/K_2 - \tilde{K}'_2/\tilde{K}_2} \right\},$$

$$\eta(g) = - \frac{2K_2 \tilde{K}_2}{K_2 \tilde{K}'_2 - K'_2 \tilde{K}_2} \left[ 2 \frac{K'_2}{K_2} - \frac{K'_0}{K_0} - \frac{\tilde{K}'_2}{\tilde{K}_2} \right],$$

$$\eta_2(g) = \frac{2K_2 \tilde{K}_2}{K_2 \tilde{K}'_2 - K'_2 \tilde{K}_2} \left\{ \frac{K''_0 K_2 - K_0 K''_2}{K'_0 K_2 - K_0 K'_2} - 2 \frac{K'_2}{K_2} \right\},$$

где штрихом отмечаются производные по  $m_0^2$

## Через отношения интегралов

$$g = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2},$$

$$\beta(g) = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2} \left\{ d + 2 \frac{(\ln K_4 K_0 / K_2^2)'}{(\ln K_2 / \tilde{K}_2)'} \right\},$$

$$\eta(g) = 2 \frac{(\ln K_2 / K_0)' + (\ln K_2 / \tilde{K}_2)'}{(\ln K_2 / \tilde{K}_2)'},$$

$$\eta_2(g) = -2 \frac{(\ln K_0 / K_2)'' + [(\ln K_0 / K_2)']^2}{(\ln K_2 / \tilde{K}_2)' (\ln K_0 / K_2)'},$$

Высокотемпературные разложения строятся для величин

$$\chi_2 = \sum_{\mathbf{x}} \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{0}} \rangle^c, \quad \mu_2 = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^2 \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{0}} \rangle^c, \quad \chi_4 = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{y}} \varphi_{\mathbf{z}} \varphi_{\mathbf{0}} \rangle^c,$$

связанных с введенными функциональными интегралами

$$\chi_2 \sim \frac{K_2}{K_0}$$

$$\mu_2 \sim \frac{\tilde{K}_2}{K_0}$$

$$\chi_4 \sim \frac{K_4}{K_0}$$

Вводя функции  $f_i(\kappa)$

$$\frac{K_2}{\tilde{K}_2} = 2d \frac{\chi_2}{\mu_2} \equiv \frac{1}{\kappa} f_0(\kappa)$$

$$\frac{K_2}{K_0} = 2\kappa \chi_2 \equiv \kappa f_2(\kappa)$$

$$\frac{K_4 K_0}{K_2^2} = \frac{1}{3} \frac{\chi_4}{\chi_2^2} \equiv -f_4(\kappa)$$

получим

$$g = \left( \frac{f_0(\kappa)}{\kappa} \right)^{d/2} f_4(\kappa),$$

$$\frac{\beta(g)}{g} = d - 2\kappa \frac{[\ln f_4(\kappa)]'}{1 - \kappa [\ln f_0(\kappa)]'},$$

$$\eta(g) = -2\kappa \frac{[\ln f_0(\kappa) f_2(\kappa)]'}{1 - \kappa [\ln f_0(\kappa)]'},$$

$$\eta_2(g) = -2 \frac{(1 + \kappa [\ln f_2(\kappa)]')^2 + 1 - \kappa^2 [\ln f_2(\kappa)]''}{(1 - \kappa [\ln f_0(\kappa)]') (1 + \kappa [\ln f_2(\kappa)]')}$$

## Общая стратегия

Пусть некоторая величина  $F$  имеет критическое поведение

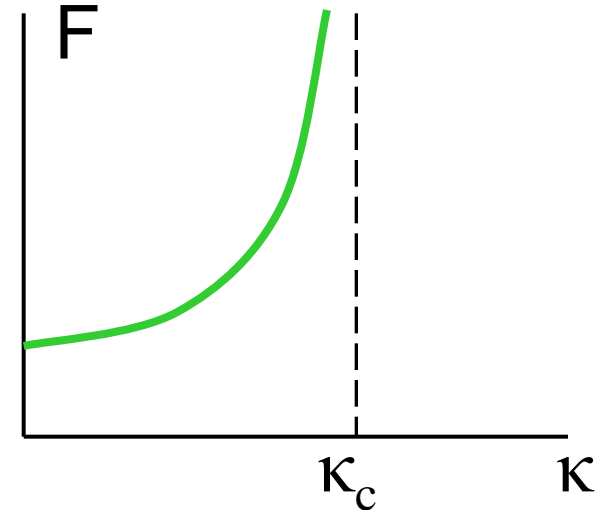
$$F \propto (T - T_c)^{-\lambda} \propto (\kappa_c - \kappa)^{-\lambda}$$

Тогда для логарифмической производной

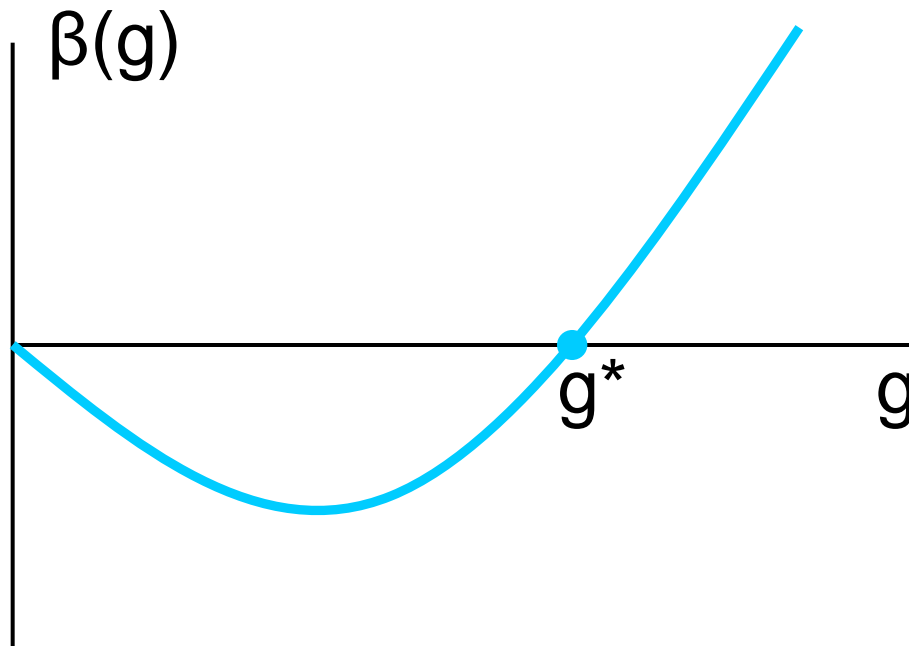
$$(\ln F)' = \frac{F'}{F} \sim \frac{-\lambda}{\kappa - \kappa_c}$$

Положение полюса и вычет в нем определяется путем построения Паде-аппроксимант [M/N]

$$(\ln F)' = \frac{P_M(\kappa)}{Q_N(\kappa)} = \frac{p_0 + p_1\kappa + \dots + p_M\kappa^M}{1 + q_1\kappa + \dots + q_N\kappa^N}$$



Зная характер сингулярности при  $\kappa = \kappa_c$ , можно получить описание всей области  $0 < \kappa < \kappa_c$ ,  
что определяет РГ функции для  $g^* < g < \infty$ ,  
где  $g^*$  - неподвижная точка ренормгруппы.  
При  $d=4$  имеем  $g^*=0$  и РГ функции определяются  
для всех  $g$ .





Использование этой стратегии в четырехмерном случае затрудняется существованием логарифмических поправок к скейлингу

А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ 56, 2087 (1969)

$$\begin{aligned}\chi_2 &\sim \tau^{-1}(\ln \tau)^p, \\ \xi^2 &\sim \frac{\chi_2}{\mu_2} \sim \tau^{-1}(\ln \tau)^p, \\ \chi_4 &\sim \tau^{-4}(\ln \tau)^{4p-1},\end{aligned}\quad p = -\frac{\zeta_1}{\beta_2} = \frac{n+2}{n+8} \quad (1)$$

где  $\tau \sim \kappa_c - \kappa$  — расстояние до перехода, а показатель  $p$  определяется первыми членами разложения РГ функций:

$$\begin{aligned}\beta(g) &= \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \dots, \\ \eta(g) &= \delta_2 g^2 + \delta_3 g^3 + \dots, \\ \eta_2(g) &= \zeta_1 g + \zeta_2 g^2 + \dots,\end{aligned}$$

Отметим еще поведение заряда  $g$

$$g = \frac{c_0}{|\ln \tau|}, \quad c_0 = 2/\beta_2 \quad (\tau \rightarrow 0) \quad (2)$$

При выполнении (1) и (2) параметрическое представление автоматически дает при малых  $g$ :

$$\beta(g) = \beta_2 g^2, \quad \eta(g) = 0 \cdot g, \quad \eta_2(g) = \zeta_1 g$$

# Нулевое приближение

Для введенных функций  $f_i(\kappa)$  имеем

$$f_0 \sim \tau (\ln \tau)^{-p}, \quad f_2 \sim \tau^{-1} (\ln \tau)^p, \quad f_4 \sim \tau^{-2} (\ln \tau)^{2p-1}$$

В нулевом приближении игнорируем логарифмические поправки и производим обработку на степенную зависимость:

Положение полюса, соответствующего критической точке  $\kappa_c$  и вычет в нем (в скобках) для Паде-аппроксимант  $[N/N]$  функций  $[\ln f_i(\kappa)]'$ .

$N$	$[\ln f_0(\kappa)]'$	$[\ln f_2(\kappa)]'$	$[\ln f_4(\kappa)]'$
2	0.07519 (1.130)	0.07510 (-1.113)	0.07442 (-1.832)
3	0.07521 (1.131)	0.07543 (-1.085)*	0.07419 (-1.814)
4	0.07502 (1.116)	0.07497 (-1.101)	0.07476 (-1.879)
5	0.07480 (1.063)	0.07513 (-1.103)*	0.07477 (-1.881)
6	0.07486 (1.082)	0.07490 (-1.088)	0.07476 (-1.879)

Первая оценка критической точки

$$\kappa_c = 0.07476 \div 0.07490$$

Более точная оценка критической точки получается для комбинации

$$f_4 f_2 \sim \tau^{-3}$$

свободной от логарифмов:

Положение полюса, соответствующего критической точке и вычет в нем для различных Паде-аппроксимант функции  $[\ln f_4 f_2]'$ .

$N$	$[N + 1/N]$	$[N/N]$	$[N/N + 1]$
2	0.07418 (−2.871)	0.07461 (−2.936)	0.07558 (−2.963)
3	0.07488 (−2.993)	0.07450 (−2.923)	0.07465 (−2.946)
4	0.07486 (−2.988)	0.07485 (−2.986)	0.07486 (−2.988)
5	0.07487 (−2.989)	0.07486 (−2.987)	0.07491 (−2.998)*
6	0.07481 (−2.970)	0.07484 (−2.983)	0.07483 (−2.978)

$$\kappa_c = 0.07481 \div 0.07487$$

# Первое приближение

В этом приближении мы полагаем

$$f_0 = \tilde{f}_0(\ln \tau)^{-p}, \quad f_2 = \tilde{f}_2(\ln \tau)^p, \quad f_4 = \tilde{f}_4(\ln \tau)^{2p-1}$$

и обрабатываем на степенную зависимость функции  $\tilde{f}_i(\kappa)$

Поскольку соотношение  $\tau = A(\kappa_c - \kappa)$  содержит неуниверсальный множитель  $A$ , то можно принять

$$\ln \tau = A_0 + \ln(1 - \kappa/\bar{\kappa}_c)$$

где свободный параметр  $A_0$  и пробное значение  $\bar{\kappa}_c$  для критической точки используются для точной подгонки показателя степени и получения самосогласованного результата для  $\kappa_c$ .

$$[\ln \tilde{f}_0(\kappa)]'$$

$$[6/6], \bar{\kappa}_c = 0.074842$$



$A_0$	pole (residue)
2.0	0.07491 (1.037)
1.0	0.07487 (1.018)
0.5	0.074855 (1.0085)
0.25	0.074846 (1.0029)
0.13	0.0748420 (1.00005)
0.1	0.074840 (0.9993)
0.06	0.07487 (1.0033)



$$[\ln \tilde{f}_2(\kappa)]'$$

$$[6/6], \bar{\kappa}_c = 0.074834$$

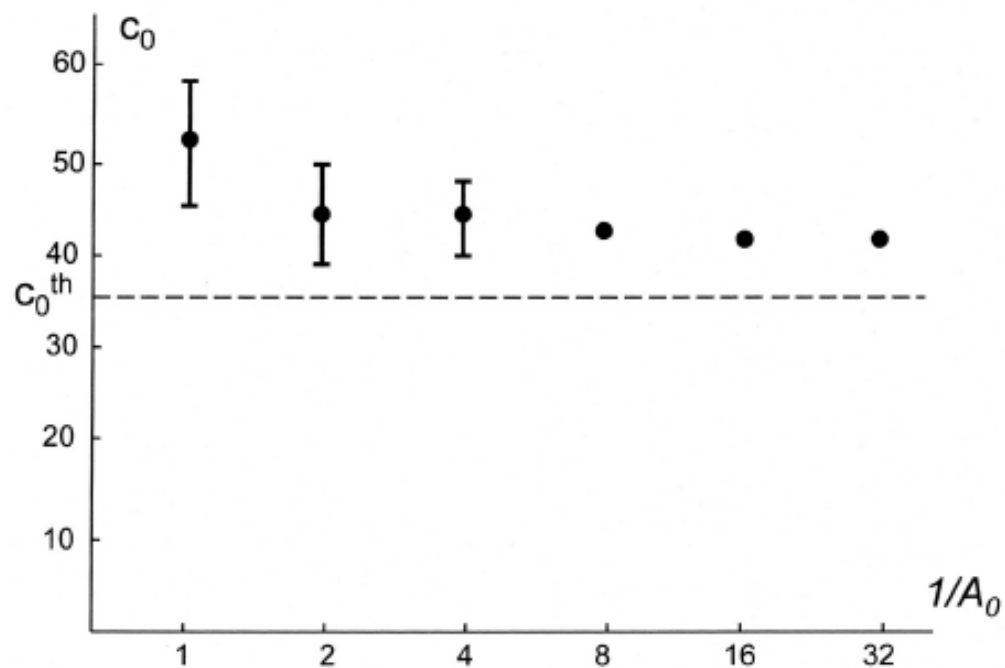
$A_0$	pole (residue)
2.0	0.07486 (−1.023)
1.0	0.074844 (−1.007)
0.625	0.074834 (−1.00005)
0.5	0.07482 (−0.996)
0.25	0.07475 (−0.973)
0.1	0.07483 (−0.990)
0.06	0.07482 (−0.988)



$$[\ln \tilde{f}_4(\kappa)]'$$

$$[6/5], \bar{\kappa}_c = 0.074890$$

$A_0$	pole (residue)
2.0	0.07488 (−1.968)
1.0	0.07493 (−1.989)
0.5	0.07477 (−1.960)
0.25	0.07488 (−1.996)
0.2	0.074890 (−1.9994)
0.1	0.07490 (−2.0044)
0.06	0.07491 (−2.0063)



Проверка соотношения

$$g = \frac{c_0}{|\ln \tau|}, \quad c_0 = 2/\beta_2 \quad (\tau \rightarrow 0)$$

## Второе приближение

Переход от главного ко второму логарифмическому приближению в основном сводится к замене

$$\ln |\tau| \rightarrow \ln |\tau| + s \ln \ln |\tau|$$

с известным параметром  $s$ . Неоднозначность нормировки  $\tau$  приводит к необходимости рассмотрения комбинаций

$$A + \ln |\tau| + s \ln \left[ B + \ln |\tau| \right]$$

Мы принимаем функциональную форму, следующую из теории возмущений:

$$f_0 = h_0 \tau (f_{sing})^{-p}, \quad f_2 = h_2 \tau^{-1} (f_{sing})^p h_{sing}, \quad f_4 = h_4 \tau^{-2} (f_{sing})^{2p-1}$$

$$f_{sing}(\kappa) = 1 - \bar{g} \ln \tau + s \bar{g} \ln (1 - \bar{g} \ln \tau),$$

$$h_{sing}(\kappa) = 1 + q \frac{\bar{g}}{f_{sing}(\kappa)}, \quad \tau = 1 - \kappa/\kappa_c$$

$$f_0 = \tilde{f}_0 (f_{sing})^{-p}, \quad f_2 = \tilde{f}_2 (f_{sing})^p h_{sing}, \quad f_4 = \tilde{f}_4 (f_{sing})^{2p-1}$$

$$[\ln \tilde{f}_0(\kappa)]' \\ [6/6], \bar{\kappa}_c = 0.074843$$

$\bar{g}$	pole (residue)
0.5	0.07492 (1.036)*
0.7	0.07488 (1.019)*
0.9	0.07485 (1.0051)
0.99	0.074843 (1.00006)
1.0	0.074842 (0.9994)
1.2	0.07482 (0.988)



$$[\ln \tilde{f}_2(\kappa)]' \\ [6/6], \bar{\kappa}_c = 0.074840$$

$\bar{g}$	pole (residue)
0.5	0.07488 (−1.024)
0.7	0.07485 (−1.0096)
0.85	0.074840 (−1.0008)
0.9	0.074836 (−0.998)
1.0	0.07483 (−0.994)
1.2	0.07476 (−0.976)



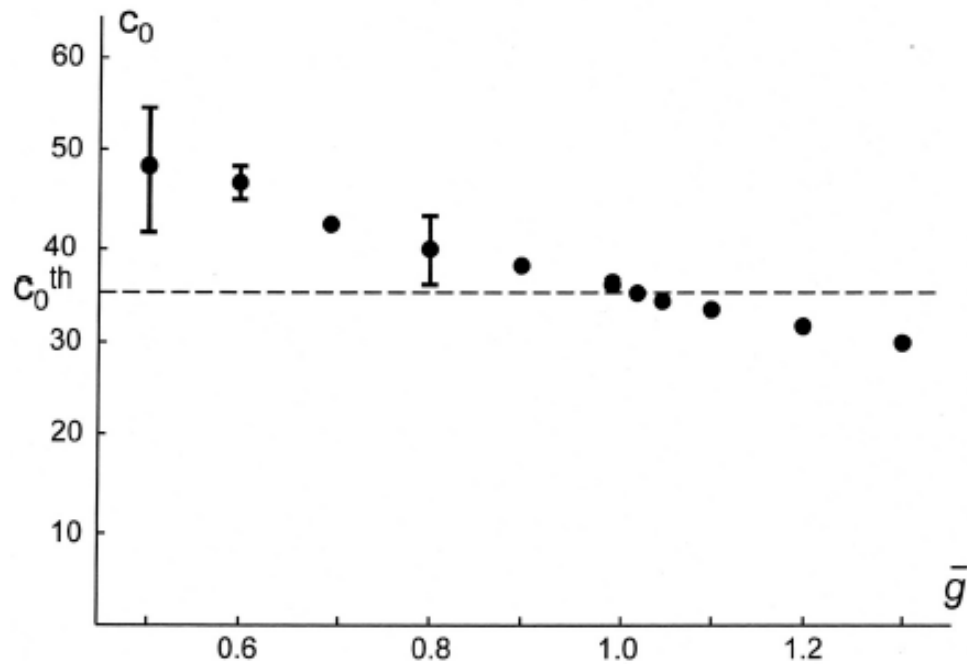
$$[\ln \tilde{f}_4(\kappa)]' \\ [6/5], \bar{\kappa}_c = 0.074865$$

$\bar{g}$	pole (residue)
0.5	0.07487 (−1.968)
0.7	0.07491 (−1.988)
0.9	0.074875 (−1.994)
1.0	0.074864 (−1.997)
1.05	0.074865 (−1.9995)
1.2	0.07488 (−2.010)

$$\kappa_c = 0.074840 \div 0.074865$$



Проверка соотношения  $g = \frac{c_0}{|\ln \tau|}$ ,  $c_0 = 2/\beta_2$  ( $\tau \rightarrow 0$ )



Для  $\bar{g} = 0.85 \div 1.05$  имеем

$$c_0 = 36.3 \pm 1.8 \quad (c_0^{th} = 35.09)$$

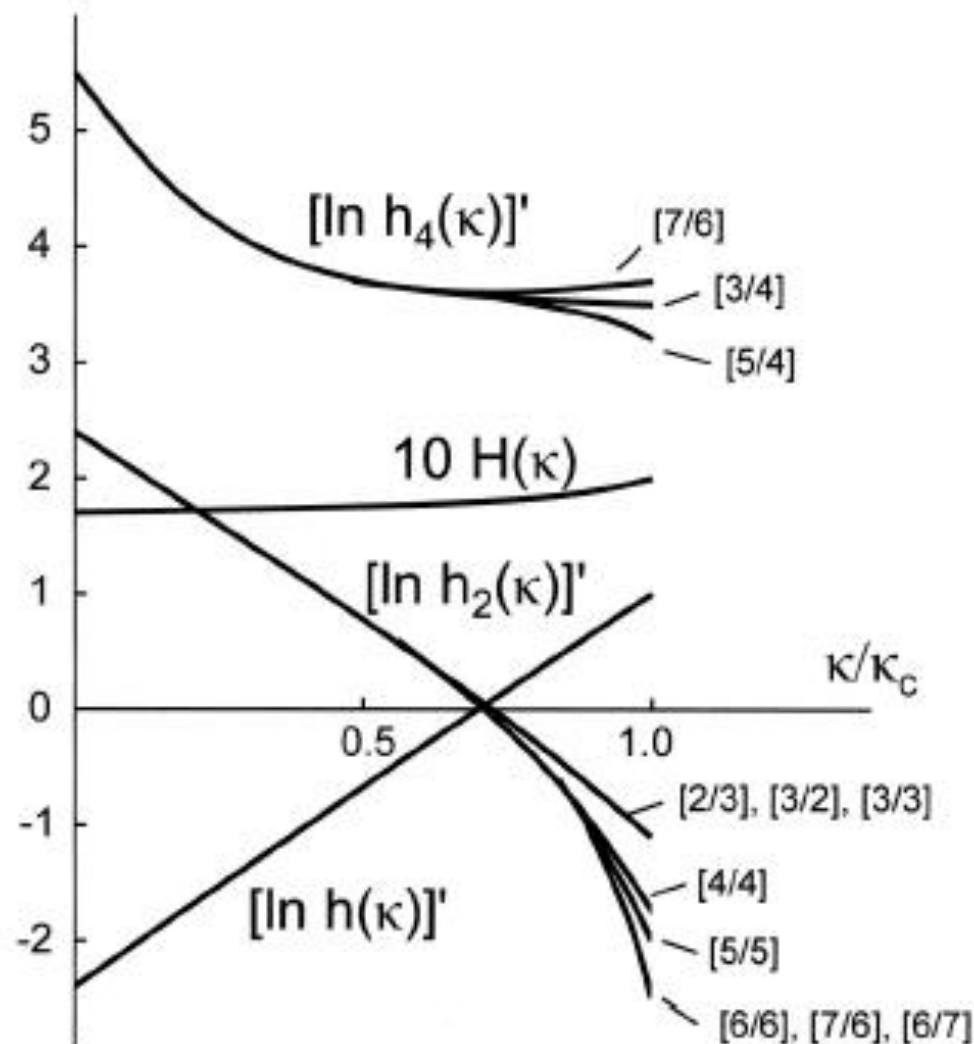
## Регулярные функции

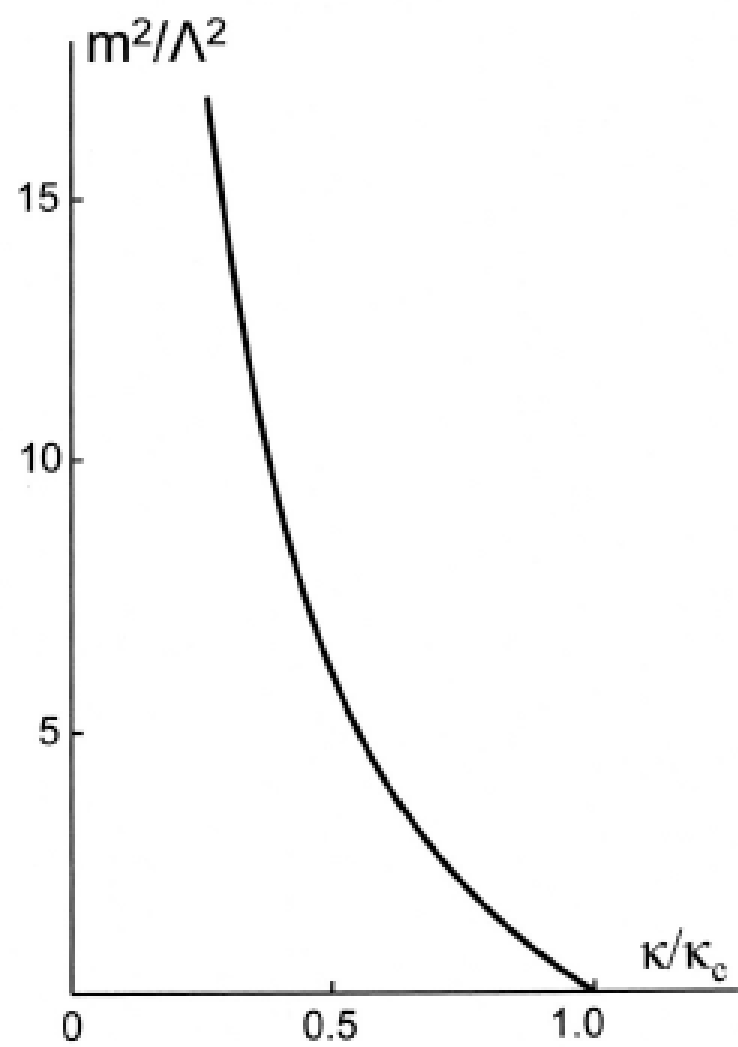
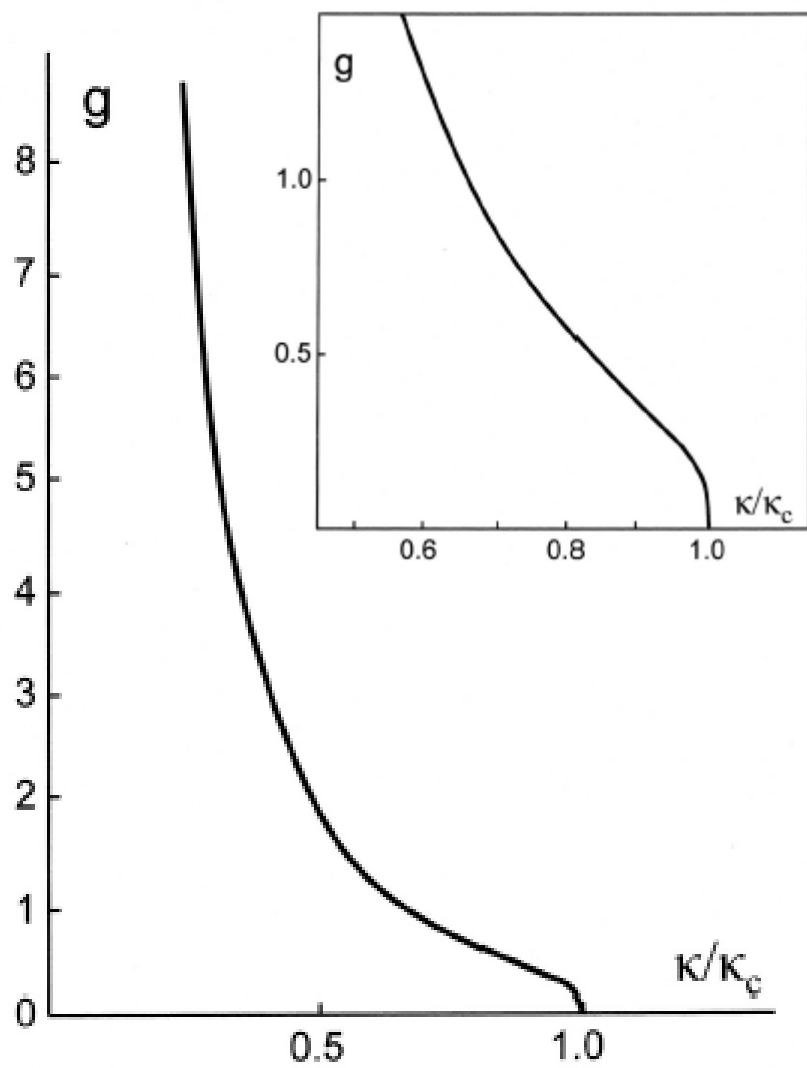
$$f_0 = h_0 \tau (f_{sing})^{-p}$$

$$f_2 = h_2 \tau^{-1} (f_{sing})^p h_{sing}$$

$$f_4 = h_4 \tau^{-2} (f_{sing})^{2p-1}$$

$$H(\kappa) = h_4 h_0^2$$





Производные от сингулярных функций могут быть записаны в виде

$$[\ln f_{sing}]' = \frac{u_1(\tau)}{\kappa_c \tau}, \quad [\ln f_{sing}]'' = \frac{u_2(\tau)}{(\kappa_c \tau)^2}, \quad [\ln h_{sing}]' = \frac{v_1(\tau)}{\kappa_c \tau}, \quad [\ln h_{sing}]'' = \frac{v_2(\tau)}{(\kappa_c \tau)^2}$$

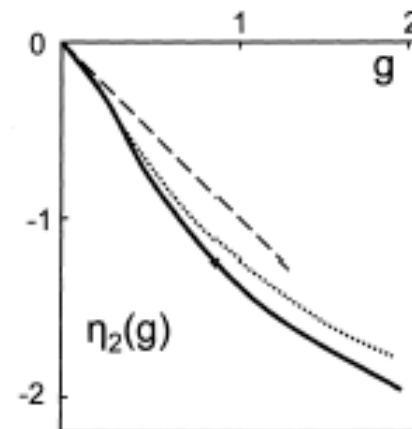
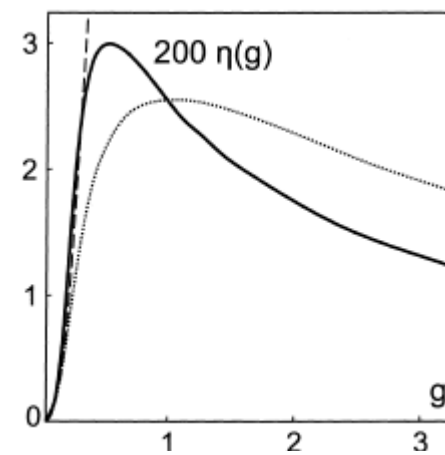
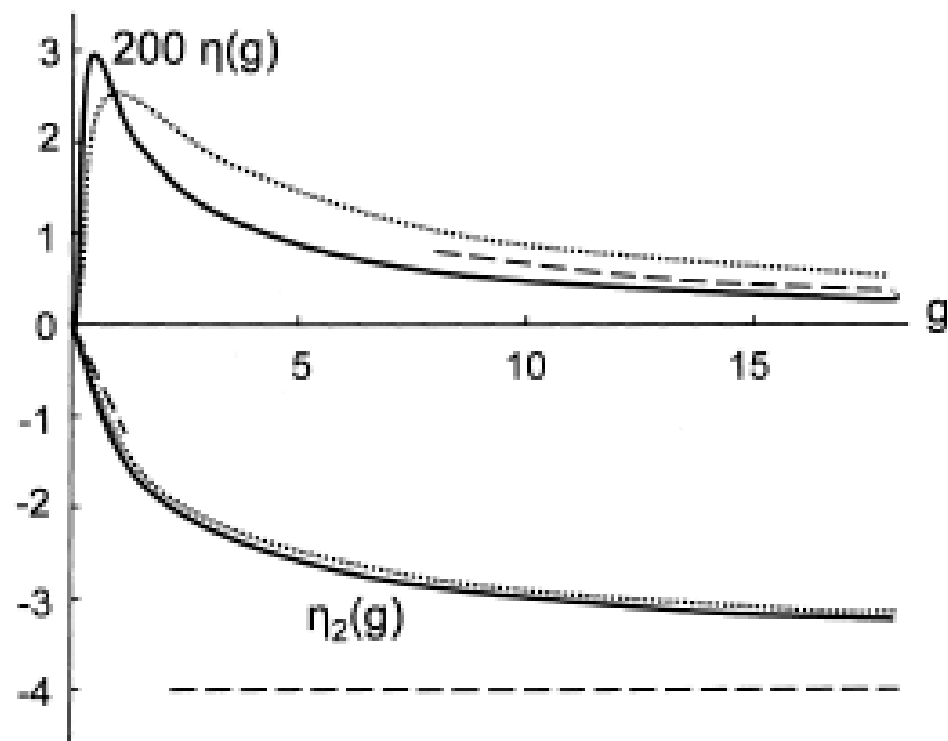
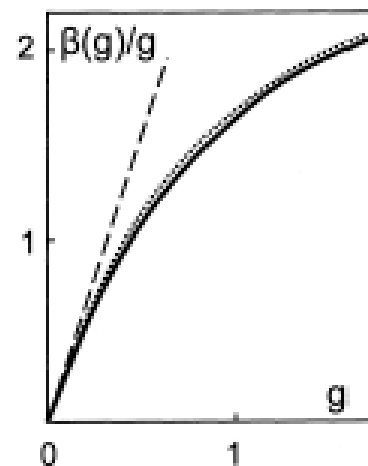
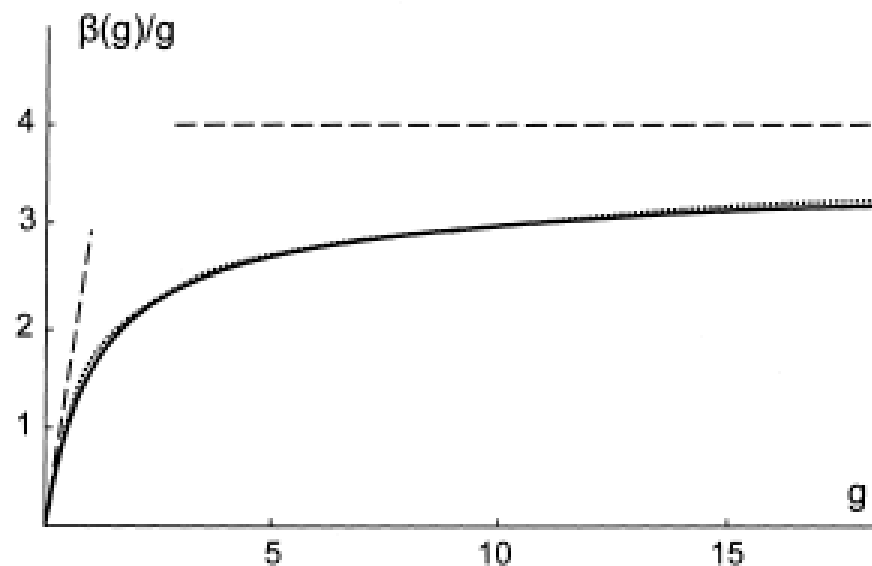
Параметрическое представление принимает вид :

$$g = \frac{H(\kappa)}{\kappa^2 f_{sing}}, \quad H(\kappa) = h_4 h_0^2,$$

$$\frac{\beta(g)}{g} = \frac{2\kappa_c \tau (2 - \kappa [\ln h_4 h_0^2]') + 2\kappa u_1}{\kappa_c \tau (1 - \kappa [\ln h_0]') + \kappa(1 + pu_1)},$$

$$\eta(g) = \frac{-2\kappa_c \tau \kappa [\ln h_0 h_2]' - 2\kappa v_1}{\kappa_c \tau (1 - \kappa [\ln h_0]') + \kappa(1 + pu_1)},$$

$$\eta_2(g) = -2 \frac{(\kappa_c \tau)^2 (1 - \kappa^2 [\ln h_2]') + \{\kappa_c \tau (1 + \kappa [\ln h_2]') + \kappa(1 + pu_1 + v_1)\}^2 - \kappa^2(1 + pu_2 + v_2)}{\{\kappa_c \tau (1 - \kappa [\ln h_0]') + \kappa(1 + pu_1)\} \{\kappa_c \tau (1 + \kappa [\ln h_2]') + \kappa(1 + pu_1 + v_1)\}}$$



# Разложения сильной связи

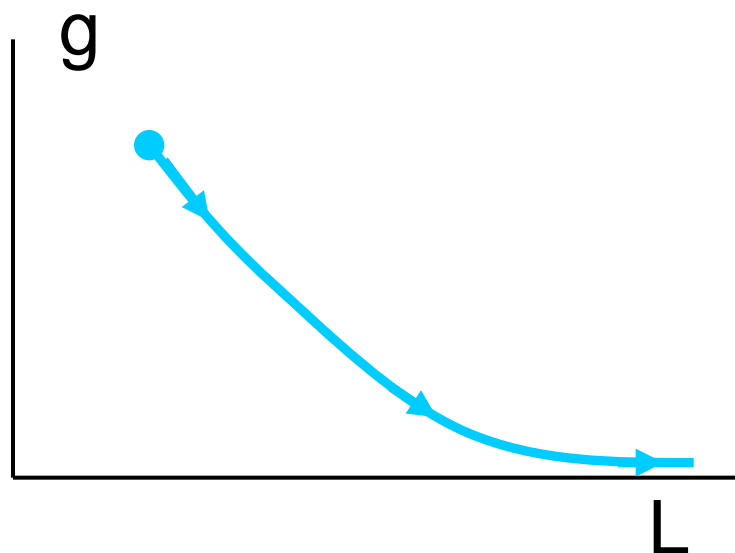
РГ функции раскладываются в ряды по  $g^{-2/d}$  :

$$\frac{\beta(g)}{g} = \sum_{N=0}^{\infty} B_N \left(-g^{-2/d}\right)^N \quad \text{и т.д.}$$

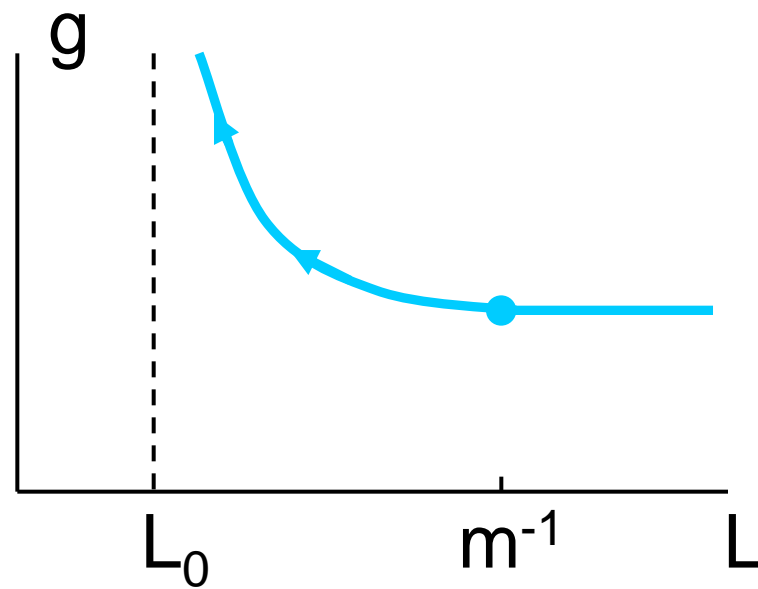
$N$	$\beta(g)/g$	$\eta(g)$	$\eta_2(g)$
0	4.00000000000000	0.00000000000000	-4.00000000000000
1	-26.127890589687	0.00000000000000	26.127890589687
2	106.666666666666	1.77777777777777	-60.444444444444
3	-557.39499924665	-11.612395817638	81.286770723472
4	3214.2222222221	29.708641975308	-44.879012345695
5	-16396.702894504	22.708685154477	-1208.7213779957
6	67356.444444432	-961.13125612398	9071.1992161454
7	-139720.34647768	7188.4949076856	-49662.878604241
8	-717634.37037244	-27680.892323840	197619.39191503
9	9878174.8209247	-7609.7703277375	-226822.08364126
10	-59767955.489704	938372.27840847	-3873286.8465521
11	186179701.36334	-7226487.6363735	41826925.334797
12	355069103.58896	27981910.625966	-249549251.38460
13	-8851453360.7421	7407298.5714308	794136522.54618

# Окончательное решение вопроса о «тривиальности»

Перепутаны два определения тривиальности:



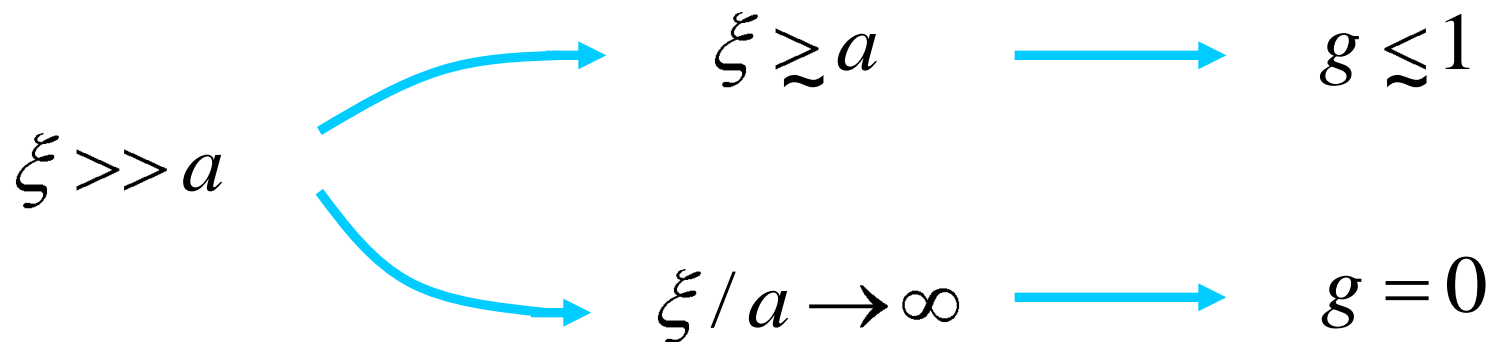
Тривиальность по Вильсону



Истинная тривиальность

## Стандартные представления:

Решеточная теория  $\phi^4$  является разумным приближением для истинно континуальной теории поля. Отсюда



и это правильно. Неправильно же – представление о роли и месте решеточной теории.



# Схема построения континуальной теории

Выражая величины  $g$ ,  $m$ ,  $A_i$ , относящиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы :

$$g = F_g(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$m = F_m(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$A_i = F_i(g_0, m_0, \Lambda)$$

Или с учетом размерности

$$g = F_g(g_0, m_0/\Lambda) ,$$

$$m = \Lambda F_g(g_0, m_0/\Lambda) ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(g_0, m_0/\Lambda)$$

Исключая  $g_0$  и  $m_0$  :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i(g, m/\Lambda)$$

Предел  $\Lambda \rightarrow \infty$  дает  $g = 0$  .

# Схема построения континуальной теории

Выражая величины  $g$ ,  $m$ ,  $A_i$ , относящиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы :

$$g = F_g(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$m = F_m(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$A_i = F_i(g_0, m_0, \Lambda)$$

Или с учетом размерности

$$g = F_g(g_0, m_0/\Lambda) ,$$

$$m = \Lambda F_m(g_0, m_0/\Lambda) ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(g_0, m_0/\Lambda)$$

Исключая  $g_0$  и  $m_0$  :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i(g, m/\Lambda)$$

Предел  $\Lambda \rightarrow \infty$  дает  $g = 0$  .

После перехода  
к модели Изинга

$$g = F_g(\kappa)$$

$$m = \Lambda F_m(\kappa)$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\kappa)$$



$$A_i = m^{d_i} F_i(g)$$

# Хиггсовский бозон – оценка массы

Из электрослабой теории

$$m_H \propto \sqrt{g}$$

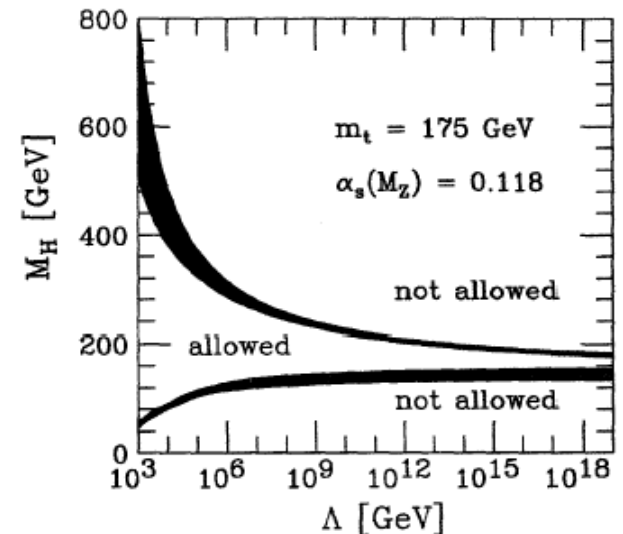
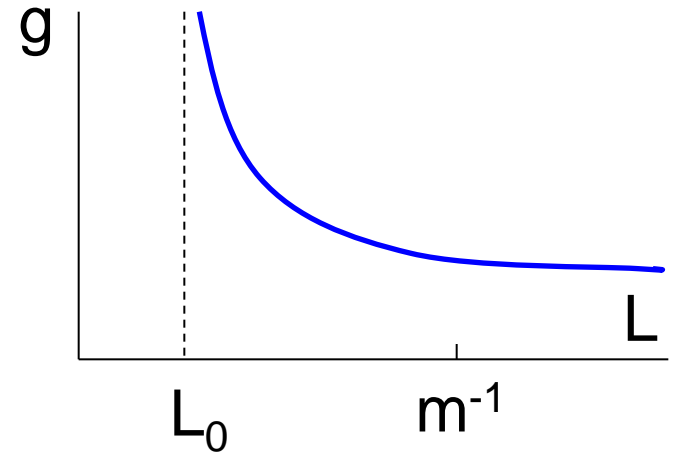
“Triviality bound” на константу  $g$

$$g = \frac{g_0}{1 + \beta_2 g_0 \ln(\Lambda/m)} < \frac{1}{\beta_2 \ln(\Lambda/m)}$$

откуда

$$m_H < \frac{900 \text{ GeV}}{\ln(\Lambda/m)^{1/2}}$$

где  $m \sim m_Z \sim m_W$





TH

E

EN