

КВАНТОВЫЕ ТОЧКИ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Капуткина Н. Е.

10-19 сентября 2010 г.

e-mail: kaputkina@mail.ru

Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС",
Москва

11я конференция "Проблемы физики твердого тела и высоких
давлений"

- Отдельные квантовые точки

- Отдельные квантовые точки
- Связанные квантовые точки

- Отдельные квантовые точки
- Связанные квантовые точки
- Отдельные и связанные квантовые точки в микрорезонаторе

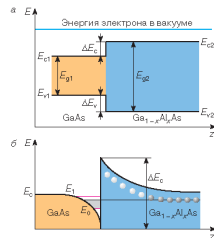
- Отдельные квантовые точки
- Связанные квантовые точки
- Отдельные и связанные квантовые точки в микрорезонаторе
- Аперриодические последовательности квантовых точек

Квантовые точки и квантовые ямы

Способы получения КТ на основе

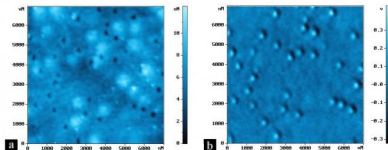
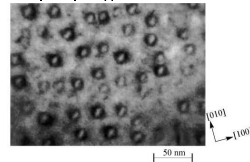
полупроводниковых гетероструктур и МДП-структур

- путем приложения электрического напряжения к управляющему электроду;
- путем молекулярно-лучевой эпитаксии (в т.ч. при использовании самосогласованного роста по механизму Странского-Крастанова);
- путем газофазной эпитаксии;
- путем электронно-лучевой литографии с селективным травлением;
- методами коллоидной химии;
- естественные или природные (natural) квантовые точки - обусловленные случайными флуктуациями потенциального рельефа.



а) зонная диаграмма $GaAs$ и $Ga_{1-x}Al_xAs$. б) профиль дна зоны проводимости E_c

гетероперехода,



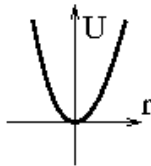
Размер скана $7 \times 7 \mu m$

Модели удерживающего потенциала



Квантовые точки

$$U(r) = \alpha r^2$$



параболический потенциал

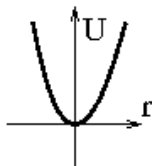
Внешнее магнитное поле $\vec{A} = \frac{[\vec{B}\vec{r}]}{2}$ – симметричная калибровка
векторного потенциала

Модели удерживающего потенциала

•

Квантовые точки

$$U(r) = \alpha r^2$$

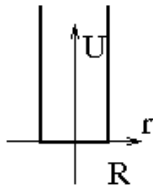


параболический потенциал

•

Квантовые ямы

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ +\infty, & r \geq R \end{cases}$$



модель жестких стенок

Внешнее магнитное поле $\vec{A} = \frac{[\vec{B}\vec{r}]}{2}$ – симметричная калибровка векторного потенциала

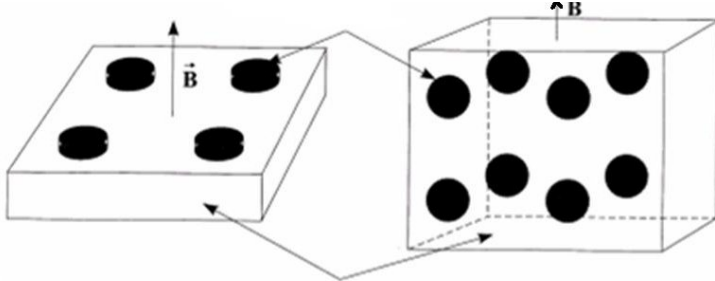
Условные единицы

	Электронные системы	Экситонные системы
Длина	$a_0 = \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m_e^* e^2}$	$a_0 = \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m^* e^2}$
Энергия	$E_0 = \frac{2m_e^* e^4}{\hbar^2 \varepsilon^2}$	$E_0 = \frac{2m^* e^4}{\hbar^2 \varepsilon^2}$
Крутизна потенциала	$\alpha_0 = \frac{E_0}{a_0^2}$	$\alpha_0 = \frac{E_0}{a_0^2}$
Магнитная индукция	$B_0 = \frac{(2m_e^*)^2 e^3 c}{\hbar^3 \varepsilon^2}$	$B_0 = \frac{2(m^*)^2 e^3 c}{\hbar^3 \varepsilon^2}$
Циклотронная частота	$\omega_{c0} = \frac{4m_e^* e^4}{\varepsilon^2 \hbar^3}$	$\omega_{c0} = \frac{2m^* e^4}{\varepsilon^2 \hbar^3}$
Ларморова частота		$\omega_{L0} = \frac{m^* e^4}{\varepsilon^2 \hbar^3} = \frac{\omega_{c0}}{2}$

где ε – диэлектрическая проницаемость; $m_{e,h}^*$ – эффективная масса электрона (e) или дырки (h); $m^* = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}$ – приведенная масса экситона

Симметрия электронной системы двумерных и трехмерных квантовых точек в магнитном поле

Узкозонный полупроводник



Широкозонный полупроводник

Двумерные КТ: симметрия задачи не меняется при приложении магнитного поля

Трехмерные КТ: симметрия задачи при приложении магнитного поля меняется от сферической на аксиальную

Приближения, используемые для расчета квантовых точек

- Многоэлектронные квантовые точки

Приближения, используемые для расчета квантовых точек

- Многоэлектронные квантовые точки
- Малоэлектронные квантовые точки

Приближения, используемые для расчета квантовых точек

- Многоэлектронные квантовые точки
 - Приближение хаотических фаз
- Малоэлектронные квантовые точки

Приближения, используемые для расчета квантовых точек

- Многоэлектронные квантовые точки
 - Приближение хаотических фаз
 - Лестничное приближение
- Малоэлектронные квантовые точки

Приближения, используемые для расчета квантовых точек

- Многоэлектронные квантовые точки
 - Приближение хаотических фаз
 - Лестничное приближение
- Малоэлектронные квантовые точки
 - Теория возмущений

Приближения, используемые для расчета квантовых точек

- Многоэлектронные квантовые точки
 - Приближение хаотических фаз
 - Лестничное приближение
- Малоэлектронные квантовые точки
 - Теория возмущений
 - Численная диагонализация гамильтониана

Условия резонансов для многоэлектронных КТ (ПХФ)

$$\Gamma_{nn'm}(\varepsilon_{\text{собо}}) \rightarrow \infty :$$

$$\sum_{n_1 n_2 n_4 m_4} V_{nn_1 m} K_{n_1 n_2 n_4 m_4} K_{n_2 n_4 m_4 + m} \frac{n_F(\varepsilon_{n_4 m_4}) - n_F(\varepsilon_{n_2 m_4 + m} - \varepsilon_{\text{собо}})}{\varepsilon_{\text{собо}} - \varepsilon_{n_2 m_4 + m} + \varepsilon_{n_4 m_4}} \rightarrow 1.$$

$$\begin{cases} \Gamma_{nn'm}(\varepsilon_{\text{собо}}) \rightarrow \infty : \\ \Gamma_{n^* n' m}(\varepsilon_{\text{собо}}) \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 n_2 n_4 m_4} V_{nn_1 m} (K_{n_2 n_4 n m_4 + m} + K_{n_2 n_4 n^* m_4 + m}) \frac{n_F(\varepsilon_{n_4 m_4}) - n_F(\varepsilon_{n_2 m_4 + m} - \varepsilon_{\text{собо}})}{\varepsilon_{\text{собо}} - \varepsilon_{n_2 m_4 + m} + \varepsilon_{n_4 m_4}} = \\ = \frac{V_{nn_1 m}}{n^* n_1 m} - 1. \end{aligned}$$

α заменяется параметром $\beta^2 = \left(\frac{\omega_c}{4}\right)^2 + \alpha$, учитывающим и жесткость удерживающего потенциала, и величину магнитного поля [Blanter, Kaputkina, Lozovik, *Physica Scripta*, 54, 539, 1996].

Поскольку $\varepsilon_{nm} = 4\beta \left(n + \frac{|m|+1}{2}\right) + \frac{\omega_c}{4}m$, то

$$\varepsilon_{n_2 m_4 + m} - \varepsilon_{n_4 m_4} = 2\beta (2(n_2 - n_4) + |m + m_4| - |m_4|) + \frac{\omega_c}{4}m_4.$$

При $\alpha \leq \omega_c$ большой вклад вносят те состояния, у которых

$$\varepsilon \approx \frac{\omega_c}{4} (4(n_2 - n_4) + 2(|m + m_4| - |m_4|) + m_4) = \frac{\omega_c}{4} N$$

Однако для сильных магнитных полей необходим также учет лестничных диаграмм. Для слабых магнитных полей, когда выполняется условие $\omega_c < \sqrt{\alpha}$, применимо ПХФ и сделанные выводы справедливы.

Малозлектронные КТ

Кулоновское взаимодействие и влияние магнитного поля

$\beta = \left[\left(\frac{\omega_c}{4} \right)^2 + \alpha \right]^{\frac{1}{2}}$ – параметр, характеризующий **эффeктивную крутизну** удерживающего потенциала в магнитном поле, который растет с ростом поля

[Blanter, Kaputkina, Lozovik, *Physica Scripta*, 54, 539, 1996].

Энергии центра масс (энергии Дарвина-Фока)

$$E_{Rnm} = 2^{\frac{3}{2}} \beta \left(n + \frac{|m| + 1}{2} \right) + \frac{\omega_c}{4} m$$

и волновые функции

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(R) &= \left(\frac{n!}{\pi(|m| + n)!} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^{|m|+1} \right)^{\frac{1}{2}} R^{|m|} \times \\ &\times \exp \left(-\beta \frac{R^2}{2\sqrt{2}} \right) L_n^{|m|} \left(\frac{\beta R^2}{\sqrt{2}} \right) \exp(im\theta), \end{aligned}$$

где $L_n^{|m|}$ – присоединенные полиномы Лагерра

Численная диагонализация полного гамильтониана

на одночастичном базисе

$$\det \left[V_{nm}^{n'm} + \delta_{nn'} (\varepsilon_{nm} - E_r) \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} V_{nm}^{n'm} &= \left(\frac{n!n'!}{(n+|m|)!(n'+|m|)!} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} (-1)^{i+j} \binom{n+|m|}{n-i} \times \\ &\times \binom{n'+|m|}{n-j} \frac{\Gamma(i+j+|m|+\frac{1}{2})}{i!j!} \\ f_{nm} &= \left(\frac{n!}{\pi(|m|+n)!} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^{|m|+1} \right)^{\frac{1}{2}} r^{|m|} e^{-\beta \frac{r^2}{2\sqrt{2}}} L_n^{|m|} \left(\frac{\beta r^2}{\sqrt{2}} \right) \\ f_m &= \sum_n C_{nm} f_{nm} \end{aligned}$$

[Lozovik, Kaputkina *Phys. Scripta*, 57, 538, 1998]

на базисе функций гармонического осциллятора, локализованных в центрах классической кристаллизации электронов

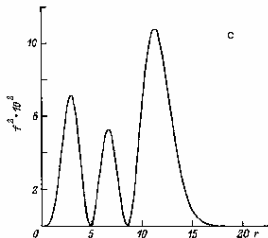
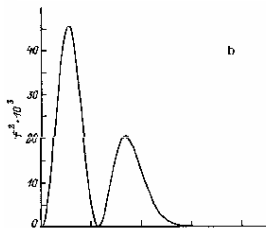
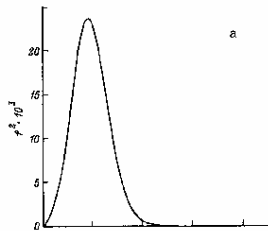
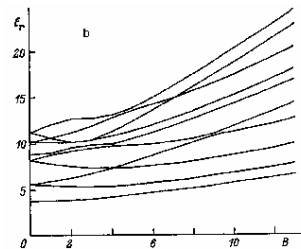
$$f'_{nm}(x) = \left(\frac{(a_m/2)^{1/2}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\sqrt{\frac{a_m}{2}} \frac{x^2}{2} \right) H_n \left(\left(\frac{a_m}{2} \right)^{\frac{1}{4}} x \right),$$

где $x = r - r_0$, r_0 – среднее расстояние между электронами,

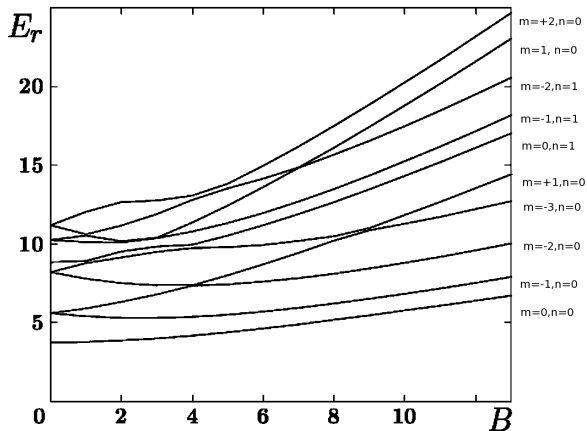
$$a_m = \beta^2 + \frac{2}{r_0^3} + \frac{6m^2}{r_0^4}$$
$$f'_m = \sum_n C_{nm} f'_{nm}$$

[Капуткина, Лозовик, *ФТТ*, 40, 1753, 1998]

Примеры рассчитанных спектров энергий и волновых функций относительного движения электронов в КТ



Зависимость нижних уровней энергии от магнитного поля при значении параметра удерживающего потенциала $\alpha = 3$



$$U(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2 + z^2)$$

- Одночастичный спектр энергий имеет вид

$$E_{nl} = \sqrt{\alpha}(4n + 2l + 3)$$

- Волновые функции

$$\begin{aligned} \psi_{nlm} = & \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \sqrt{\frac{2\alpha^{\frac{l+\frac{3}{2}}{2}} n!}{\Gamma(n+l+1/2)}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha}r^2}{2}\right) r^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha}r^2) \end{aligned}$$

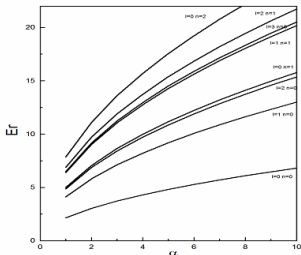
где $P_l^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра 1-го рода

"Шаровые" КТ

Спектр энергий относительного движения

$$\det [V_{nn_1lm} + \delta_{nn_2}(E_{nlm} - E_r)] = 0$$

$$V_{nn_1lm} = \alpha \sqrt{\frac{n!n_1!}{\Gamma(n+l+1+\frac{1}{2})\Gamma(n_1+l+1+\frac{1}{2})}} \times \\ \times \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n_1} \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \binom{n+l+\frac{1}{2}}{n-i} \binom{n_1+l+\frac{1}{2}}{n_1-j} \Gamma\left(i+j+l+\frac{1}{2}\right)$$



Зависимость нижних уровней энергии E_r от параметра крутизны удерживающего потенциала α для двухэлектронных "шаровых" квантовых точек с трехмерным удерживающим потенциалом [Капуткина, Лозовик, *ФТТ*, 40, 2134, 1998]

Электронная корреляция и квантовая “кристаллизация” в КТ в магнитном поле

- ① Классическая система:

$$\Gamma_{short\ order}^{class} = \frac{e^2}{ak_B T} \sim 10, \quad a = \pi n^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } n - \text{двумерная плотность}$$

Электронная корреляция и квантовая “кристаллизация” в КТ в магнитном поле

- 1 Классическая система:

$$\Gamma_{short\ order}^{class} = \frac{e^2}{ak_B T} \sim 10, \quad a = \pi n^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } n - \text{двумерная плотность}$$

- 2 Квантовая система

$$\Gamma_{short-order}^{quant} = \frac{e^2}{\epsilon r} \frac{m^* r^2}{h^2} = \frac{r}{a_0} = r_s, \quad \Gamma_{short-order}^{quant} \sim 10, \quad r_s \sim 10$$

Электронная корреляция и квантовая “кристаллизация” в КТ в магнитном поле

- 1 Классическая система:

$$\Gamma_{short\ order}^{class} = \frac{e^2}{ak_B T} \sim 10, \quad a = \pi n^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } n - \text{двумерная плотность}$$

- 2 Квантовая система

$$\Gamma_{short-order}^{quant} = \frac{e^2}{\epsilon r} \frac{m^* r^2}{h^2} = \frac{r}{a_0} = r_s, \quad \Gamma_{short-order}^{quant} \sim 10, \quad r_s \sim 10$$

- 3 $T = 0$ Параметр Линдемана

$$\gamma = r_s^{-\frac{3}{4}}, \gamma_{short-order}^{crit} \approx \frac{1}{4}, \quad \beta_{short-order}^{crit} \approx 0.005$$

Электронная корреляция и квантовая “кристаллизация” в КТ в магнитном поле

- 1 Классическая система:

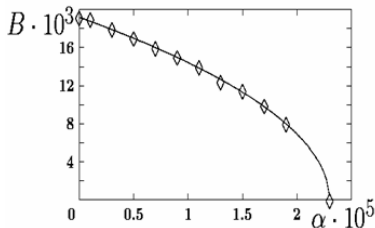
$$\Gamma_{short\ order}^{class} = \frac{e^2}{ak_B T} \sim 10, \quad a = \pi n^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } n - \text{двумерная плотность}$$

- 2 Квантовая система

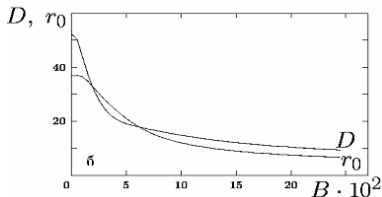
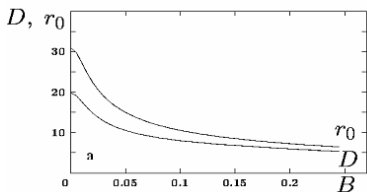
$$\Gamma_{short-order}^{quant} = \frac{e^2}{\epsilon r} \frac{m^* r^2}{\hbar^2} = \frac{r}{a_0} = r_s, \quad \Gamma_{short-order}^{quant} \sim 10, \quad r_s \sim 10$$

- 3 $T = 0$ Параметр Линдемана

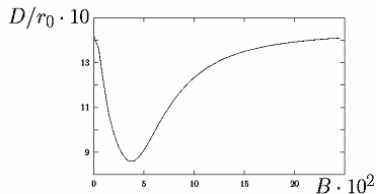
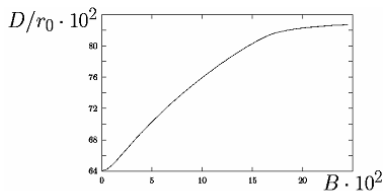
$$\gamma = r_s^{-\frac{3}{4}}, \gamma_{short-order}^{crit} \approx \frac{1}{4}, \quad \beta_{short-order}^{crit} \approx 0.005$$



Условная граница области квантовой “кристаллизации” электронов в зависимости от магнитного поля B и крутизны удерживающего потенциала α [Капуткина, Лозовик, *ФТТ*, 40, 2127, 1998]



Зависимости полуширины пика D квадрата радиальной волновой функции и среднего расстояния между электронами r_0 от величины магнитного поля B при постоянном параметре крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 10^{-5}$: а) $m = 0$; б) $m = 1$

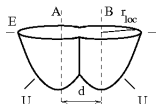
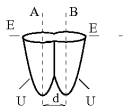


Зависимость отношения величины D к среднему расстоянию между электронами r_0 от магнитного поля B при постоянном параметре крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 10^{-5}$: а) $m = 0$; б) $m = 1$

- "Молекулы"КТ. Система двух взаимодействующих КТ представляет собой своего рода гигантскую искусственную молекулу, но в отличие от молекул, состоящих из атомов, в "молекуле" КТ расстояние между центрами (межслоевое расстояние для "вертикальной молекулы") КТ фиксировано при создании структуры. Мы рассмотрели "горизонтальные" – состоящие из КТ, расположенных в одной плоскости, – и "вертикальные" – состоящие из КТ, расположенных в разных плоскостях (в слоистых гетероструктурах), "молекулы" из КТ с двумерным (2D) параболическим латеральным удерживающим потенциалом
- "Горизонтальные молекулы"КТ

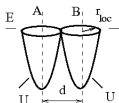
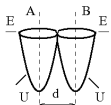
"Горизонтальные молекулы" КТ

Эволюция "горизонтальной молекулы" КТ. Применимость различных приближений



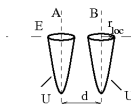
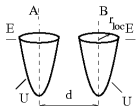
$$d < r_{loc},$$

MO, V



$$d \sim r_{loc}$$

V



$$d > kr_{loc}$$

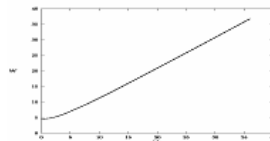
($k \sim 3$)
HL, V

с ростом расстояния
между центрами
квантовых точек

с ростом эффективной
крутизны удерживающего
потенциала во внешнем
магнитном поле

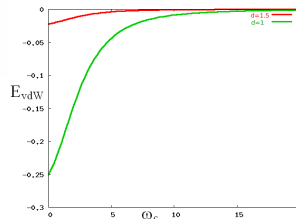
HL - метод Гайтлера-Лондона; MO - метод молекулярных орбиталей; V - вариационный метод [Lozovik, Kaputkina *Phys. Scripta*, 57, 541, 1998, Капуткина, Лозовик, *Изв. ВУЗов. Мат. эл. техн.*, 1, 60, 1999]

Зависимость энергии W "горизонтальной молекулы" из КТ от циклотронной частоты магнитного поля ω_C при постоянном расстоянии между центрами квантовых точек $d = 1.5$ и параметре крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 1$

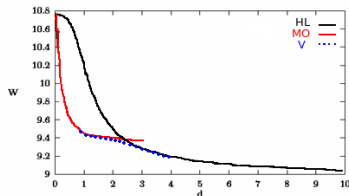


С ростом β растет энергия W , для больших β асимптотически стремясь к линейной зависимости от β .

Зависимость ван-дер-ваальсовой энергии взаимодействия "горизонтальной молекулы" из КТ E_{vdW} от циклотронной частоты магнитного поля ω_C для расстояний между центрами квантовых точек $d = 1$, $d = 1.5$ и при параметре удерживающего потенциала $\alpha = 1$



Зависимость энергии W "горизонтальной молекулы" из КТ от расстояния между центрами квантовых точек d при постоянном параметре крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 5$, полученная методом Гайтлера-Лондона (HL), методом молекулярных орбиталей с использованием модифицированного потенциала (МО) и вариационным методом (V).



"Вертикальные молекулы" КТ

Энергии центра масс $E_{Rnm} = 4\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(n + \frac{|m|+1}{2} \right)$

Собственные функции

$$\psi_{Rnm} = \sqrt{\frac{n! \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{|m|+1}}{\pi(|m|+n)!}} R^{|m|} e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{R^2}{2}} L_n^{|m|} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} R^2 \right) e^{im\theta}$$

Собственные значения энергии относительного движения определяются из уравнения

$$\det [V_{nn'}^m + \delta_{nn'}(\varepsilon_{nm} - E_r)] = 0 \quad \text{где } \varepsilon_{nm} = E_{Rnm}$$

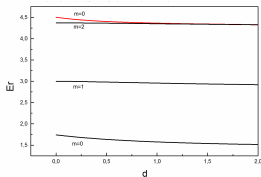
$$V_{nn'}^m = \left(\frac{n!n'!}{(n+|m|)!(n'+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} (-1)^{i+j}$$

$$\binom{n+|m|}{n-i} \binom{n'+|m|}{n'-j} \frac{\Gamma(i+j+|m|+1)}{i!j!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{|m|+i+j+1}{2}}$$

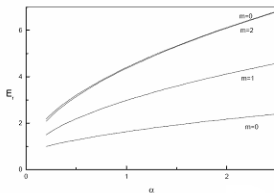
$$d^{2(i+j+|m|+\frac{1}{2})} \Psi \left(i+j+|m|+1, i+j+|m|+\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{\alpha}{2}} d^2 \right)$$

где Γ - Гамма функция Эйлера; Ψ - вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми

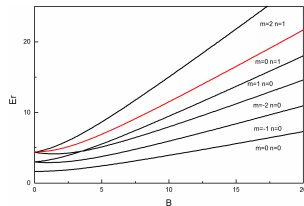
Зависимости низколежащих уровней энергии E_r от межслоевого расстояния d (а), параметра крутизны удерживающего потенциала α (б) и магнитного поля B (в) для "вертикальной молекулы" из КТ



Вклад кулоновского взаимодействия в энергию убывает с ростом d , и энергии асимптотически стремятся к ε_{nm}



Значения энергетических уровней монотонно возрастают с ростом α . Для эффективно больших значений (для случая, когда крутизна удерживающего потенциала велика, либо для случая больших межслоевых расстояний) межэлектронное взаимодействие мало по сравнению с другими параметрами задачи и уровни энергии относительного движения асимптотически стремятся к уровням энергии двумерного гармонического осциллятора, т.е. становятся линейны по $\alpha^{\frac{1}{2}}$.



Значения энергий возрастают с ростом поля, асимптотически стремясь к

$$4\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(2n + |m| + 1) + \frac{\omega_{cm}}{4}$$

[Капуткина, Лозовик, ФТТ, 40, 2127, 1998]

Спиновая перестройка

Энергия синглетного состояния (в отсутствие магнитного поля)

$$W_{sing} = 4\sqrt{\alpha} + \frac{1}{1+e^{-\alpha d^2}}(Q_k + J_k), \text{ где } Q_k = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \iint \frac{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(r_{1a}^2 + r_{2b}^2)}{2}}}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2,$$

$$J_k = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \iint \frac{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}/2(r_{1a}^2 + r_{2b}^2 + r_{1b}^2 + r_{2a}^2)}}}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^{1/4} e^{-\sqrt{\alpha} d^2}.$$

Интеграл Q вычисляется численно.

$$\text{Энергия триплетного состояния } W_{tripl} = 4\sqrt{\alpha} + \frac{1}{1-e^{-\alpha d^2}}(Q_k - J_k).$$

Если $\delta E_{tripl} - \delta E_{singl} = 2 \frac{Q_k e^{-\alpha d^2} - J_k}{1 - e^{-2\alpha d^2}} < 0$, то основным состоянием является триплетное. Таким образом, возможно **спонтанное намагничивание**.

Влияние поперечного магнитного поля приводит к перенормировке крутизны удерживающего потенциала. С ростом перпендикулярного магнитного поля основным состоянием системы КТ становится триплетное.

Возможно управление спиновым состоянием системы КТ как с помощью внешнего поперечного магнитного поля, так и с помощью параллельного магнитного поля, или меняя крутизну удерживающего потенциала путем изменения напряжения на управляющем электроде.

[Kaputkina, Lozovik, *J. Phys. Cond. Mat.*, 18, S2169, 2006]

Магнитное поле влияет на локализацию электронов, спектры и спиновые состояния в СКТ

- Рост магнитного поля увеличивает эффективную крутизну удерживающего потенциала β и способствует локализации электронов.

Магнитное поле влияет на локализацию электронов, спектры и спиновые состояния в СКТ

- Рост магнитного поля увеличивает эффективную крутизну удерживающего потенциала β и способствует локализации электронов.
- Энергия W возрастает с ростом магнитного поля и асимптотически стремится к линейной зависимости от β для больших β .

Магнитное поле влияет на локализацию электронов, спектры и спиновые состояния в СКТ

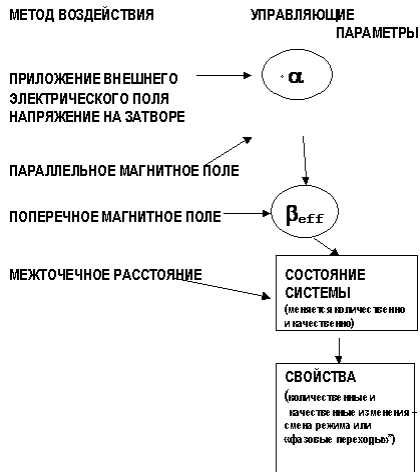
- Рост магнитного поля увеличивает эффективную крутизну удерживающего потенциала β и способствует локализации электронов.
- Энергия W возрастает с ростом магнитного поля и асимптотически стремится к линейной зависимости от β для больших β .
- С ростом магнитного поля обменное взаимодействие стремится к нулю.

Магнитное поле влияет на локализацию электронов, спектры и спиновые состояния в СКТ

- Рост магнитного поля увеличивает эффективную крутизну удерживающего потенциала β и способствует локализации электронов.
- Энергия W возрастает с ростом магнитного поля и асимптотически стремится к линейной зависимости от β для больших β .
- С ростом магнитного поля обменное взаимодействие стремится к нулю.
- С ростом поперечного магнитного поля основным состоянием системы двух СКТ становится триплетное.

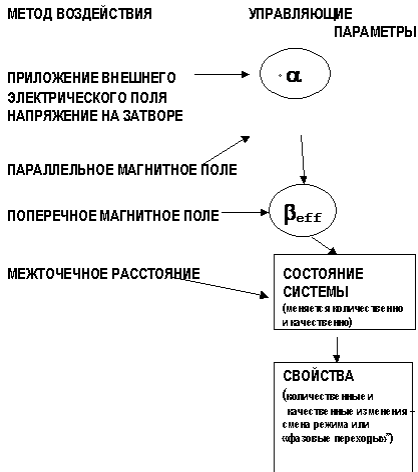
Возможности контролировать состояние отдельных КТ и системы СКТ

- Количественные изменения состояния системы ↓↓



Возможности контролировать состояние отдельных КТ и системы СКТ

- Количественные изменения состояния системы ↓
- Качественные изменения:
 - Сильная электронная корреляция
 - Слияние и разделение отдельных КТ
 - Спиновое состояние: переход синглет-триплет
 - Туннелирование через межточечный барьер и др.



Непрямые экситоны в связанных КТ в магнитном поле

$$\hat{H}_m = \frac{e}{2c} \left(\frac{A_e^2}{m_e^*} - \frac{2i\hbar \nabla_e A_e}{m_e^*} + \frac{A_h^2}{m_h^*} + \frac{2i\hbar \nabla_h A_h}{m_h^*} \right), [\mu_h(\alpha_e - 1) - \mu_e(\alpha_h - 1)] \rightarrow 0$$
$$\alpha_1 \rightarrow \alpha'_1 = \alpha_1 + \frac{\omega_c^2}{16}, \quad \alpha_2 \rightarrow \alpha'_2 = \alpha_2 + \frac{\omega_c^2}{64}, \quad E'_{nm} = E_{nm} - \frac{\gamma m \omega_c}{2}$$

[Kaputkina, Lozovik, *Phys. Stat. Sol. B*, 221, 341, 2000]

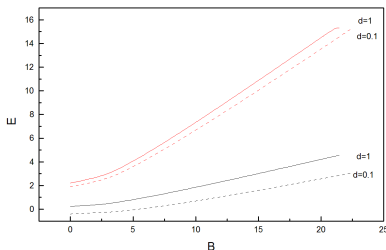
Магнитное поле

$$B \rightarrow \infty \Rightarrow E_r \rightarrow 2\sqrt{\alpha'_2}(2n + |m| + 1) - \gamma\omega_c m,$$

$$d \rightarrow \infty \Rightarrow E_r \rightarrow 2\sqrt{\alpha'_2}(2n + |m| + 1) - \gamma\omega_c m - \frac{1}{d} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha'_2}d^3},$$

$$d \rightarrow 0 \Rightarrow V_{nn'}^m \rightarrow - \left(\frac{n!n'!}{(n + |m|)!(n' + |m|)!} \alpha'_2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} (-1)^{i+j} \binom{n + |m|}{n - i} \binom{n' + |m|}{n' - j} \frac{\Gamma(i + j + |m| + \frac{1}{2})}{i!j!}$$

Непрямые экситоны в связанных КТ в магнитном поле



Магнитное поле

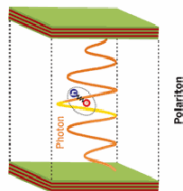
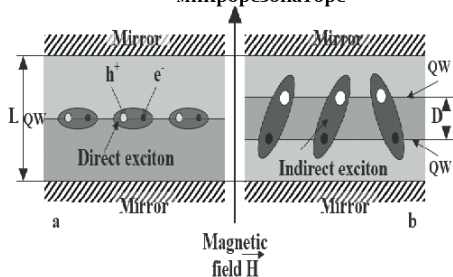
$$B \rightarrow \infty \Rightarrow E_r \rightarrow 2\sqrt{\alpha'_2}(2n + |m| + 1) - \gamma\omega_c m,$$

$$d \rightarrow \infty \Rightarrow E_r \rightarrow 2\sqrt{\alpha'_2}(2n + |m| + 1) - \gamma\omega_c m - \frac{1}{d} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha'_2}d^3},$$

$$d \rightarrow 0 \Rightarrow V_{nn'}^m \rightarrow - \left(\frac{n!n'!}{(n + |m|)!(n' + |m|)!} \alpha'_2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} (-1)^{i+j} \binom{n + |m|}{n - i} \binom{n' + |m|}{n' - j} \frac{\Gamma(i + j + |m| + \frac{1}{2})}{i!j!}$$

Отдельные и связанные КТ и КЯ в микрорезонаторе

Отдельные (а) и связанные(б) КЯ в микрорезонаторе



Представление вторичного квантования

$$\hat{H} = \sum \varepsilon_f b_{rf}^\dagger b_{rf} + \frac{1}{2} \sum' b_{rf'}^\dagger b_{mg'}^\dagger b_{mg} b_{rf} \langle f' g' | \hat{V}_{nm} | fg \rangle$$

(суммирование по n, m, f, f', g, g' для $n \neq m$)

Гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$$

где

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mu k} \varepsilon_\mu(k) B_\mu^\dagger(k) B_\mu(k)$$

- гамильтониан без учета взаимодействия экситонов

[Kaputkina, Lozovik, Willander, *Physica B*, 378, 1049, 2006]

Условия сильного поляритонного резонанса

Для очень низкой экситонной плотности N_0 спектр совпадает с богوليубовским спектром слабо неидеального газа бозонов с отталкиванием

$$\varepsilon(k) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}\right)^2 + \frac{4\pi N_0 \hbar^2 a}{m^*} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}\right)}$$

$k = 0$ - минимум энергии экситонной зоны.

Условие сильного поляритонного резонанса $E_{microcavity} = E_{exc}$

$$E_{exc}(k=0) + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}\right)^2 + \frac{4\pi N_0 \hbar^2 a}{m^*} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}\right)} = E_{microcavity}(k=0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

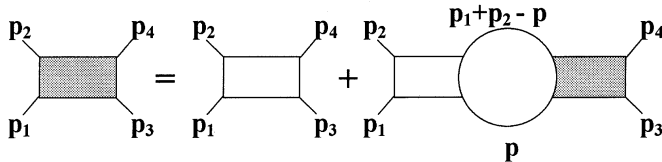
$M = \frac{\hbar \pi n^2}{cL}$, где n - эффективный коэффициент отражения; L - размер микрорезонатора; $E_{microcavity}(k=0)$ - энергия фотонной моды при $k=0$; m^* - эффективная масса экситона; a - амплитуда экситон-экситонного рассеяния

$$\varepsilon_0 = \frac{Am^*}{4m^{*2} - 2M^2} (m^{*2} - M^2 \pm m^{*2}), \quad A = 4\pi N_0 \hbar^2 / m^*$$

Магнитное поле влияет на эффективную массу экситона и пересечение экситонной и фотонной мод

Для низкой (но не сверхнизкой) экситонной плотности N_0 ($N_{ex} a^2 \ll 1$) адекватным приближением будет суммирование лестничных диаграмм (см O.L.Berman, Yu.E.Loikov, D.W.Snoke and R.D.Coalson, Phys.Rev.B 70, 235310(2004).)

Ladder diagram



Приложение внешнего магнитного поля дает возможность управлять поляритонным эффектом

Спектр коллективных возбуждений при малых магнитных импульсах оказывается акустическим $\varepsilon(P) = C_S P$, где скорость звука

$$C_S = \sqrt{\frac{n\Gamma}{m_B}} = \sqrt{\frac{\mu}{m_B}}.$$

$$\mu = \frac{k^2}{2m_B} = \frac{8\pi n}{2m_B \ln \left(\frac{1}{8\pi n m_B^2 e^4 d^4} \right)}$$

Оценка ширины щели при образовании экситонного поляритона

$$H_{exph} = d_{12} E_{ph0},$$
$$E_{ph0} = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0\hbar\omega}{V_{microcavity}}},$$

d_{12} – матричный элемент перехода с образованием экситона, дипольный момент перехода может быть представлен как матричный элемент межзонного перехода, умноженный на квадрат огибающей волновой функции магнитоэкситона $|\varphi(0)|^2$.

В сильных полях магнитных полей расщепление растет пропорционально полю

[Kaputkina, Lozovik, *Phys. Stat. Sol. C*, 3, 3500, 2006]

Оценка верхней и нижней поляритонной ветвей (закон дисперсии)

$$E_{pol}(k)^2 = E_{\text{средн}}^2 \pm \Delta_{pol}$$

$$E_{\text{средн}}^2 = \frac{E_{ex}^2(k) + E_{microcavity}^2(k)}{2}$$

$$\Delta_{pol} = \frac{\left(\left(E_{ex}^2(k) + E_{microcavity}^2(k) + \Omega^2 \right)^2 - 4 E_{ex}^2(k) E_{microcavity}^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Для возбужденных уровней с квантовым числом $m \neq 0$ (включая первый возбужденный уровень $m = 1$, $n = 0$) эффективная масса непрямого магнетоэкситона может быть отрицательной в области малых импульсов при определенных условиях (Yu.E.Lofovik and N.E.Kaputkina, *phys.stat.sol.(b)* 207, 147 (1998); Yu.E.Lofovik, A.M.Ruvinsky, *Phys.Lett.A* 227, 271 (1997); *JETP* 85, 983(1997); N. E. Kaputkina and Yu. E. Lofovik, *Physica E* 26, 291 (2005)).

Тогда возможен немонотонный закон дисперсии для возбужденного состояния экситонного поляритона

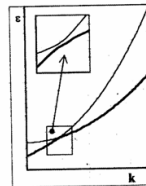
Магнитное поле контролирует экситонные спектры и законы дисперсии, глубину и положение "ротонных" минимумов.

Приложение внешнего магнитного поля дает возможность управлять как образованием экситонных поляритонов, так и их спектрами и законами дисперсии

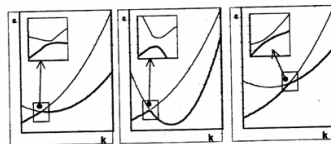
[Kaputkina, Lofovik, *Physica B*, 403, 1537, 2007 ,

Kaputkina, Lofovik, *Phys. Stat. Sol. C*, 6, 20, 2009]

Закон дисперсии для экситонного поляритона: энергия основного состояния

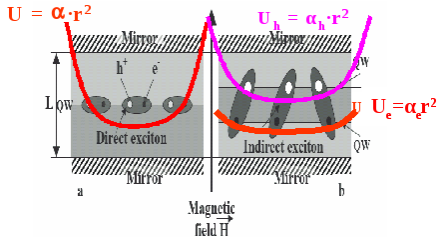


энергия возбужденного состояния

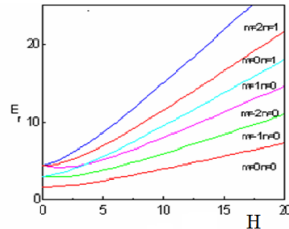


Влияние магнитного поля на экситоны в отдельных и связанных квантовых точках и на экситонные поляритонные системы в оптических микрополостях

Отдельные (а) и связанные (б) КТ в микрорезонаторе



Зависимости нижних уровней энергии относительного движения экситонов от магнитного поля



Магнитное поле увеличивает эффективную крутизну удерживающего потенциала. Это ведет к перестройке спектра как экситона, так и экситонного поляритона

[Kaputkina, Lozovik, *Physica B*, 403, 1537, 2007]

Спектр квазичастиц – линейный звуковой спектр – удовлетворяет критерию Ландау для сверхтекучести, возможна сверхтекучесть поляритонов в микрорезонаторе в конфайнменте.

Для идеального двумерного Бозе-газа (без ловушки)

Бозе-Эйнштейновская конденсация невозможна при ненулевых температурах.

Но в ловушке – в параболическом удерживающем потенциале КТ – возможна Бозе-Эйнштейновская конденсация при $T < T_c$

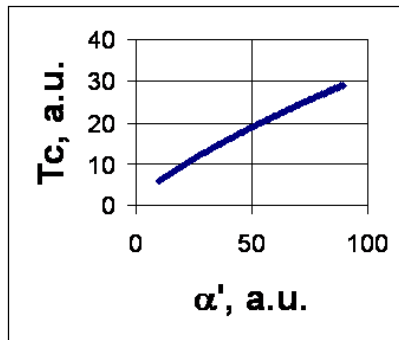
$$T_c = \sqrt{\frac{3\alpha_{eff} Ns}{2M_{eff}}} \frac{h}{k_B \pi^2},$$

где s – спиновое вырождение ($s = 2$ для светлых экситонов).

[Kaputkina, Lozovik, *Phys. Stat. Sol. C*, 6, 20, 2009]

Влияние магнитного поля и удерживающего потенциала на Бозе-конденсацию и переход Костерлица-Таулеса

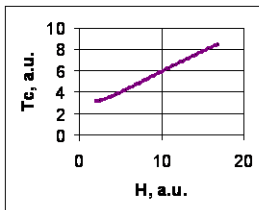
Рост параметра крутизны удерживающего потенциала способствует Бозе-конденсации и увеличивает критическую температуру



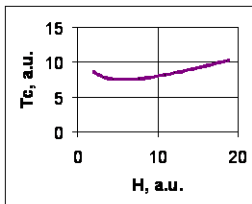
Зависимость критической температуры T_c от параметра крутизны удерживающего потенциала (α') при фиксированном значении магнитного поля $H = 10$ a.u.

Влияние магнитного поля и удерживающего потенциала на Бозе-конденсацию и переход Костерлица-Таулеса

Возможно немонотонное влияние магнитного поля на переход Костерлица-Таулеса, сверхтекучесть, и Бозе-Эйнштейновскую конденсацию для экситонных поляритонов в СКТ в микрорезонаторе.



$$\alpha' = 10$$



$$\alpha' = 100$$

Зависимость критической температуры T_c от магнитного поля при фиксированном значении параметра крутизны удерживающего потенциала (α') [Kaputkina, Lozovik, *Phys. Stat. Sol. C*, 6, 20, 2009]

- Возможно образование экситонных поляритонов для структур с одиночными и двойными квантовыми ямами и квантовыми точками, встроенными в микрорезонатор.

- Возможно образование экситонных поляритонов для структур с одиночными и двойными квантовыми ямами и квантовыми точками, встроенными в микрорезонатор.
- Приложение магнитного поля позволяет управлять спектром прямых и непрямых экситонов в квантовых ямах, а также величиной поляритонного эффекта для заданной структуры и свойствами образующихся поляритонов. Рассмотрены условия сильного поляритонного резонанса, а также оценена ширина щели. Для возбужденных уровней эффективная масса непрямого магнетоэкситона может быть отрицательной в области малых импульсов при определенных условиях и возможен немотонный закон дисперсии поляритонов для возбужденного состояния экситонного поляритона

- Возможно образование экситонных поляритонов для структур с одиночными и двойными квантовыми ямами и квантовыми точками, встроенными в микрорезонатор.
- Приложение магнитного поля позволяет управлять спектром прямых и не прямых экситонов в квантовых ямах, а также величиной поляритонного эффекта для заданной структуры и свойствами образующихся поляритонов. Рассмотрены условия сильного поляритонного резонанса, а также оценена ширина щели. Для возбужденных уровней эффективная масса непрямого магнетоэкситона может быть отрицательной в области малых импульсов при определенных условиях и возможен немонотонный закон дисперсии поляритонов для возбужденного состояния экситонного поляритона
- Магнитное поле и параметры конфайнмента влияют на переход Костерлица-Таулеса, сверхтекучесть и Бозе-Эйнштейновскую конденсацию экситонных поляритонов в связанных квантовых точках в микрорезонаторе. С ростом параметра крутизны конфайнмента растет критическая температура. В то же время зависимость критической температуры от поля может быть немонотонной для определенного диапазона параметров

Апериодические последовательности КТ

Фибоначчи

Тью-Морзе

Двупериодическая

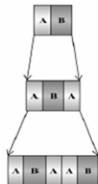
Кантора

$$S_0 = B$$

$$S_1 = A$$

$$S_n = S_{n-1} S_{n-2}$$

$$A \rightarrow AB, B \rightarrow A$$



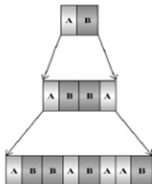
(a)

$$S_0 = A$$

$$S_0^* = B$$

$$S_n = S_{n-1} S_{n-1}^*$$

$$A \rightarrow AB, B \rightarrow BA$$



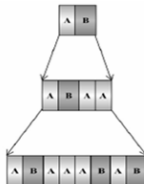
(b)

$$S_0 = A$$

$$S_1 = B$$

$$S_n = S_{n-1} S_{n-1}^*$$

$$A \rightarrow AB, B \rightarrow AA$$



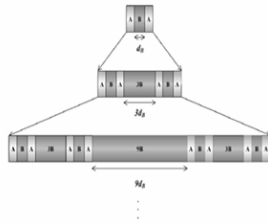
(c)

$$S_0 = A$$

$$S_1 = AB_1 A$$

$$S_n = S_{n-1} B_n S_{n-1}$$

$$A \rightarrow ABA, B \rightarrow BBB$$



$$\det \begin{pmatrix} H_{11} - E^{(1)} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} - E^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

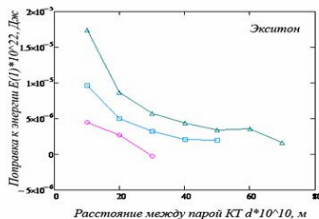
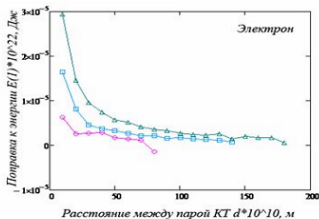
$$E_{1,2}^{(1)} = 0.5(H_{11} + H_{22}) \pm \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2}$$

$$H_{11} = \iint_{-\infty}^{\infty} (\psi_1^{(0)})^* H' \psi_1^{(0)} dx_1 dx_2, \quad H_{12} = \iint_{-\infty}^{\infty} (\psi_1^{(0)})^* H' \psi_2^{(0)} dx_1 dx_2$$

$$H_{21} = \iint_{-\infty}^{\infty} (\psi_2^{(0)})^* H' \psi_1^{(0)} dx_1 dx_2, \quad H_{22} = \iint_{-\infty}^{\infty} (\psi_2^{(0)})^* H' \psi_2^{(0)} dx_1 dx_2$$

где ψ_1 и ψ_2 – собственные функции частиц в первой и второй квантовых точках, соответственно.

Поправки к энергии первого порядка по теории возмущений при отсутствии и наличии внешнего магнитного поля



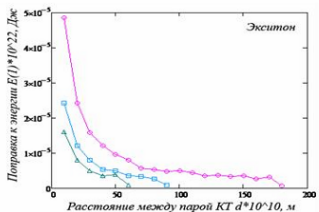
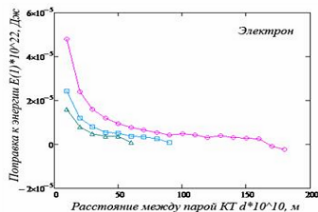
$\text{Дж} / \text{м}^2$

$\triangle - \alpha = 10^{-4}$

$\square - \alpha = 10^{-7}$

$\circ - \alpha = 10^{-6}$

$n = 15$



Тл

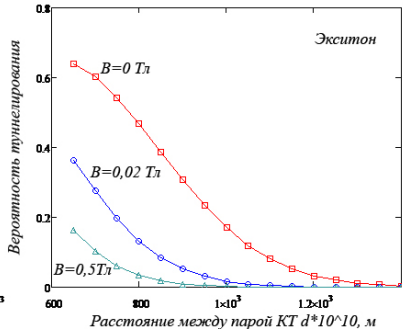
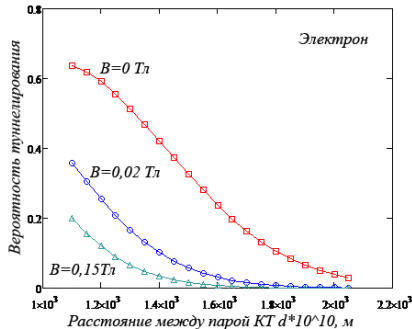
$\square - B = 0,1$

$\circ - B = 0,4$

$\triangle - B = 0,9$

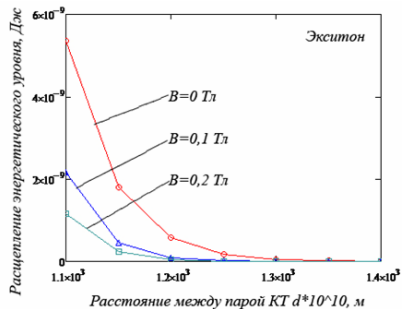
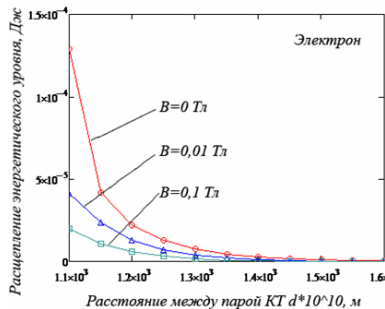
$n = 10$

Туннелирование в квазиклассическом приближении при влиянии внешнего поперечного магнитного поля



Параметр крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 10^{-8} \text{ Дж/м}^2$ и главное квантовое число $n=0$ для обеих квантовых точек. На расстоянии $d = 200 \text{ нм}$ для электрона и $d = 140 \text{ нм}$ для экситона между центрами КТ туннелированием частицы можно пренебречь. Можно видеть также, что внешнее магнитное поле способствует локализации как электронов, так и экситонов.

Зависимость расщепления энергетического уровня частицы от расстояния между центрами пары КТ в отсутствие магнитного поля и в магнитных полях различной величины



Главное квантовое число $n = 0$.

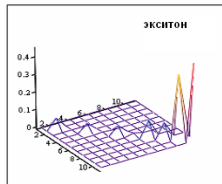
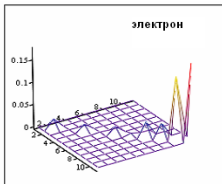
Резонансное туннелирование частицы по нестационарной теории возмущений

Коэффициент туннелирования: $W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) V_f$

$F_{fi} = \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle$ – матричный элемент энергии взаимодействия при переходе частицы с уровня f первой КТ на уровень i второй КТ;

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{e^2}{d+x_2-x_1}$ – кулоновская энергия взаимодействия;

E_f, E_i – энергия частицы в состоянии f и i , соответственно; ν – плотность состояний.



Параметр крутизны удерживающего потенциала

$$\alpha = 10^{-8} \text{ Дж/м}^2;$$

Расстояние между центрами квантовых точек $d = 540$ нм для электрона, $d = 320$ нм для экситона

Вероятность туннелирования частицы (ось z) в зависимости от главного квантового числа n (ось x и y) Конечное возмущение локализует возбуждения

[Kaputkina, Lozovik, Muntvanu, Vekilov, *Phil. Mag.* A, 88, 2253, 2008]

Анализ типа энергетического спектра аperiodических последовательностей с помощью методов уровневой статистики

Энергия N -ного образования

$$E_N = N_A \cdot E_A + N_B \cdot E_B + N_{AB} \cdot E_{AB}^{(1)} + N_{AA} \cdot E_{AA}^{(1)} + N_{BB} \cdot E_{BB}^{(1)}$$

где E_A, E_B – энергия возбуждения в КТ А, В, $E_{AB}^{(1)}, E_{AA}^{(1)}, E_{BB}^{(1)}$ – поправки с учётом парного межточечного взаимодействия.

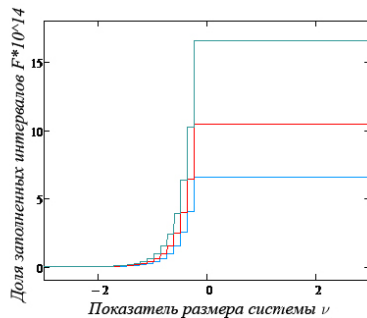
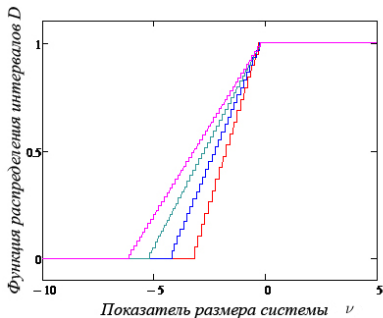
Функция распределения интервалов между уровнями ΔE соседствующих собственных значений

$$D(\nu) \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \theta \left\{ \nu - \log_N \left(\frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{\Lambda} \right) \right\}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

где N – число позиций, $\Lambda = \varepsilon_N - \varepsilon_1$ – общая зона. Доля энергетических областей, заполненных энергетическими m интервалами размером $\Delta E = \Lambda N^\nu$

$$F(\nu) \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j) \theta \left\{ \nu - \log_N \left(\frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{\Lambda} \right) \right\}$$

Анализ типа энергетического спектра апериодических последовательностей с помощью методов уровневой статистики



Распределение интервалов между уровнями $D(\nu)$ и доля общей зоны, заполненная энергетическими интервалами $F(\nu)$ в зависимости от масштабного показателя ν . Количество образований, использованных в расчете $D(\nu)$ для: 20, 30, 40, 50; $F(\nu)$ для : 48, 49, 50.

Влияние внешнего электрического поля

$$E_{n,k} = \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \left(n + \frac{1}{2} \right) - q^2 \frac{F_k^2}{2\alpha}$$

$1 \leq n \leq N$ – индекс образования (уровень электрона);

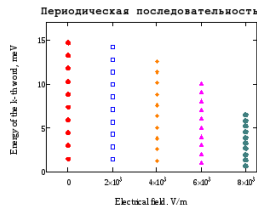
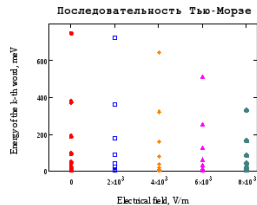
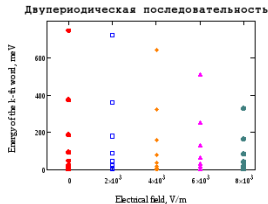
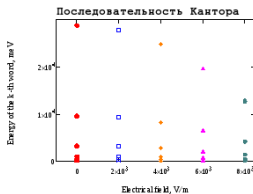
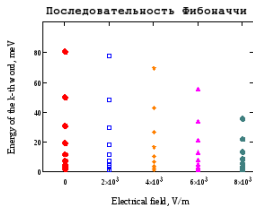
N – число "слов" в "алфавите";

α – крутизна удерживающего потенциала; μ – эффективная масса электрона; F_k – величина внешнего электрического поля.

Теория возмущений применима для полей напряженностью менее 10^4 В/м.

Энергетические спектры последовательностей Фибоначчи, двупериодической, Тью-Морзе, Кантора и периодической в зависимости от величины приложенного электрического поля рассчитаны для полей напряженностью 0, 2, 4, 6, 8 кВ/м. Расстояния между квантовыми точками $dA = 400\text{\AA}$, $dB = 200\text{\AA}$ использовались для аperiодических последовательностей Фибоначчи, двупериодической, Тью-Морзе, Кантора, для периодической последовательности использовалось расстояние между соседними квантовыми точками $d = 300\text{\AA}$. Рассматривается электрон в каждой квантовой точке на одном и том же возбужденном уровне $n = 3$. Число "слов" в каждом "алфавите" принимается равным 20.

[Kaputkina, Lozovik, Muntyanu, Vekilov, *J. Phys. Conf. Ser.*, 2010]



Чтобы сдвинуть уровни на расстояние, соответствующее межузловому расстоянию, для периодической последовательности поле существенно меньше, чем для аперiodических последовательностей.

В то время как для периодических последовательностей бесконечно малые возмущения блокируют транспорт, для аперiodических последовательностей это происходит при конечных возмущениях

- Рассмотрены отдельные и связанные КТ и аperiodические последовательности КТ (последовательности Фибоначчи, Тью-Морзе, Кантора, дупериодические).
- Определены спектры одночастичных и двухчастичных возбуждений в таких системах (для широкого диапазона управляющих параметров: крутизны удерживающего потенциала, расстояния между КТ, внешних электрического и магнитного полей).
- Показана возможность управления свойствами подобных наноструктур (энергетическими спектрами, транспортом, локализацией) путем наложения внешнего магнитного поля и внешнего электрического поля.
- Магнитное поле и параметры конфайнмента влияют на переход Костерлица-Таулеса, сверхтекучесть и Бозе-Эйнштейновскую конденсацию экситонных поляритонов в связанных КТ в микрорезонаторе. С ростом крутизны конфайнмента растет критическая температура. Зависимость критической температуры от поля может быть немонотонной.
- Изучены эффекты резонансного туннелирования и эффекты локализации одно- и двухчастичных возбуждений. В отличие от периодических последовательностей, для аperiodических локализация происходит при конечных возмущениях.

-  Ya. M. Blanter, N.E. Kaputkina, and Yu. E. Lozovik, *Two - electron quantum dots in magnetic field*, Physica Scripta **54** (1996), 539.
-  N.E. Kaputkina and Yu.E. Lozovik, *Spatially-indirect exciton in coupled quantum wells or coupled quantum dots in magnetic field*, Physica Status Solidi B **221** (2000), no. 1, 341–344.
-  ———, *Two-dimensional exciton with spatially-separated carriers in coupled quantum wells in external magnetic field*, Physica E **12** (2002), no. 1, 323–326.
-  ———, *Dimensional effects and magnetic field influence on excitons in coupled quantum dots and coupled quantum wells*, Physica E **26** (2005), no. 1, 291–296.
-  ———, *Magnetic field influence on excitons in coupled quantum wells and coupled quantum dots and on exciton polaritons in microcavities*, Physica Status Solidi (c) **3** (2006), no. 10, 3500–3503.
-  ———, *Magnetic field influence on spectrum rearrangement and spin transformation of coupled quantum dots*, J. Phys.: Condens. Matter **18** (2006), S2169–S2174.

-  _____, *Indirect excitons in coupled quantum dots and exciton polaritons in optical microcavities in magnetic field*, Physica B **403** (2007), no. 5-9, 1537–1538.
-  _____, *Influence of external magnetic field and confinement on spectrum rearrangement and exciton polaritons in optical microcavity*, Phys.Stat.Sol.(c) **6** (2009), no. 1, 20–23.
-  N.E. Kaputkina, Yu.E. Lozovik, R.F. Muntyanu, and Yu.Kh. Vekilov, *Single-particle and two-particle excitations in 1d aperiodic sequence of quantum dots*, Phil.Mag.A **88** (2008), 2253–2259.
-  _____, *Aperiodic arrays of quantum dots: influence of external magnetic and electric fields*, J. Phys. Conf. Ser. (2010).
-  N.E. Kaputkina, Yu.E. Lozovik, and M. Willander, *Influence of the magnetic field on formation and spectrum of the exciton-polariton in a microcavity*, Physica B **378** (2006), 1049–1050.
-  Yu.E. Lozovik and N.E. Kaputkina, *Quantum crystallization in two-electron quantum dot in magnetic field*, Physica Scripta **57** (1998), 538–541.

-  _____, *Quantum dot "molecule"*, Physica Scripta **57** (1998), 541–544.
-  _____, *Spatially-separated excitons in single and coupled quantum dots*, Physica Status Solidi B **207**(1998), 147–152.
-  М.В. Астахов, А.В. Белый, +, Н.Е. Капуткина, and и др., *Перспективные материалы*, УО "ВГТУ Витебск, 2009.
-  М.В. Астахов, Н.Е. Капуткина, and Л.М. Суслов, *Изменение формы импульса электромагнитного излучения при отражении от поверхности*, Изв. ВУЗов. Материалы электронной техники **4** (2004), 50–56.
-  Н.Е. Капуткина and Ю.Е. Лозовик, *Горизонтальные и вертикальные молекулы из квантовых точек*, ФТТ **40** (1998), 2127–2133.
-  _____, *Спектр непрямого магнетоэкситона*, ФТП **32** (1998), 1354–1362.
-  _____, *Шаровые квантовые точки*, ФТТ **40** (1998), 2134–2135.



_____, *Энергетические спектры и квантовая кристаллизация двухэлектронных квантовых точек в магнитных полях*, ФТТ 40 (1998), 1753–1759.



_____, *Спектры и электронная корреляция в полупроводниковых квантовых точках и молекулах из квантовых точек*, Изв. ВУЗов. Материалы электронной техники (1999), no. 1, 60–64.