



Оргкомитет XI Конференции молодых ученых «Проблемы физики твердого тела и высоких давлений» благодарит за поддержку:

**Министерство образования и науки РФ:
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОНТРАКТ № 02.741.12.2175**

РФФИ Грант № 10-02-06820

Фонд «Династия»



Аномальное поведение и переход в стекло в системах с потенциалами с отрицательной кривизной в области отталкивания

В.Н.Рыжов,

**Н.В.Грибова, Е.Е. Тареева, Ю.Д.Фомин,
Е.Н. Циок**

Институт физики высоких давлений РАН

Содержание

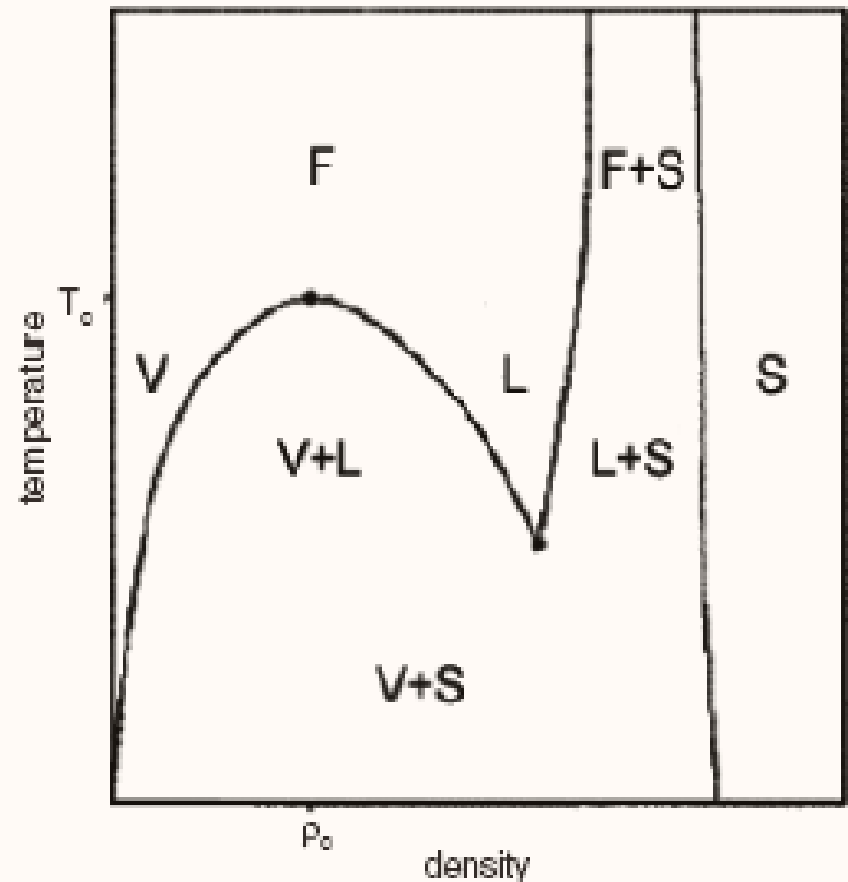
1. Введение
2. Притяжение
3. Отталкивание
4. Аномальные жидкости
5. Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания
6. Выводы

Введение

“Идеальная жидкость” –
система с потенциалом
Леннарда-Джонса –

$$u(r) = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right)$$

Отталкивающая и
притягивающая часть
потенциала ведут к
кристаллизации и
конденсации



Введение

Парный потенциал

$$U = \sum_{i < j}^N u(r_{ij})$$

Потенциал твердых сфер:
кристаллизация .

$$u_{HS}(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d \\ 0, & r > d \end{cases}$$

Параметры кристаллизации:

где $\eta = \frac{\pi}{6} \rho d^3$

$$\eta_l \approx 0.494$$

$$\eta_s \approx 0.545$$

$$\eta_{ml} \approx 0.64$$

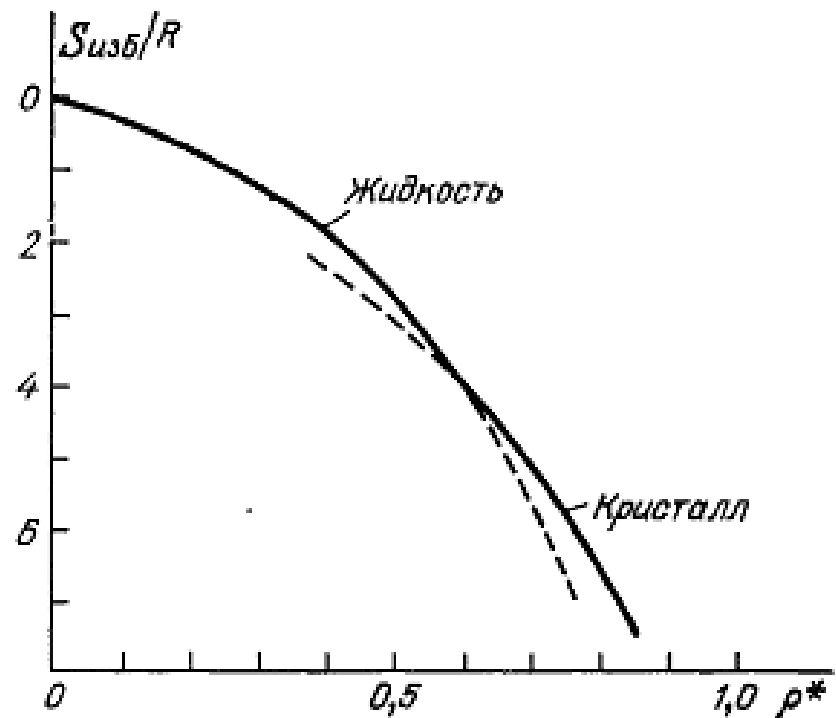
$$\eta_{cp} \approx 0.74$$

Введение

Переход в системе твердых сфер – энтропийный переход.

Свободная энергия
системы твердых сфер

$$F = (3/2)Nk_B T - TS$$



Притяжение

Существование жидкой фазы на фазовой диаграмме кардинальным образом зависит от вида притягивающей части потенциала: изменение глубины притягивающей части не меняет качественного вида фазовой диаграммы, однако изменение ширины притягивающей части может привести к кардинальному изменению фазовой диаграммы!

Примеры: межфуллеренный потенциал, **soft-matter** (коллоидные системы, полимеры, биологические объекты, etc).

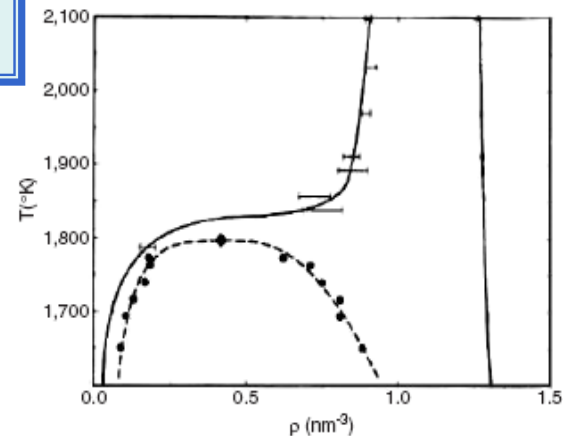
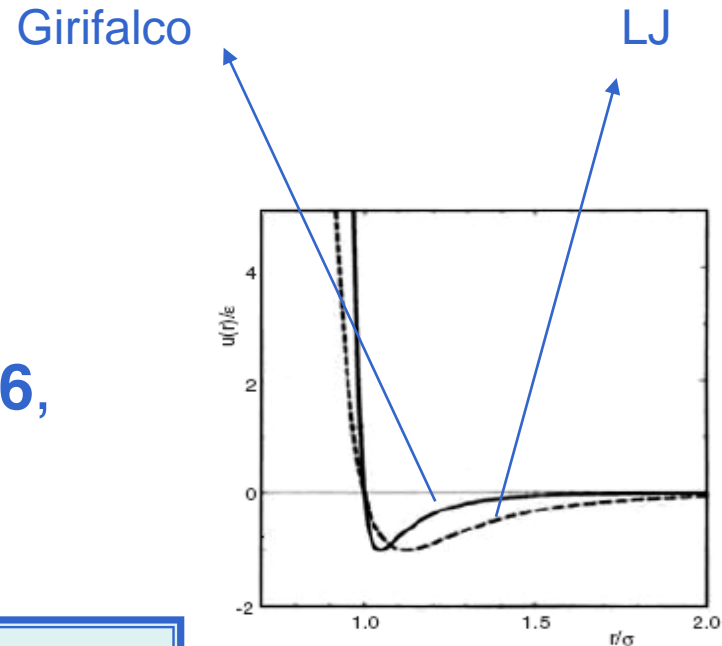
Притяжение

C_{60} - C_{60} взаимодействие —
потенциал Girifalco (L.A.
Girifalco, J. Phys. Chem. **96**,
858 (1992))

$$\phi = -\alpha \left[\frac{1}{s(s-1)^3} + \frac{1}{s(s+1)^3} - \frac{2}{s^4} \right] + \beta \left[\frac{1}{s(s-1)^9} + \frac{1}{s(s+1)^9} - \frac{2}{s^{10}} \right]$$

где $s=r/2a$

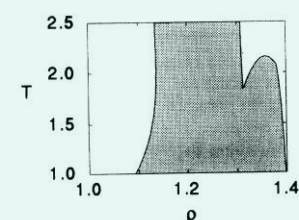
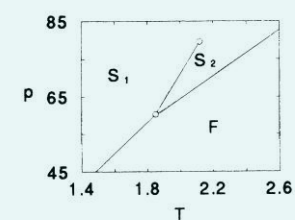
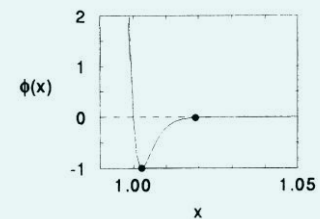
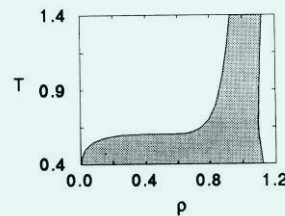
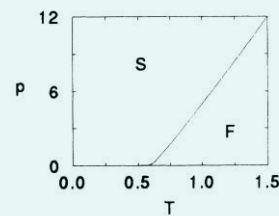
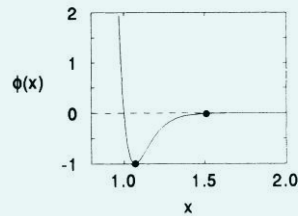
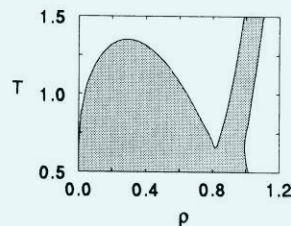
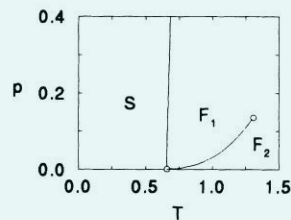
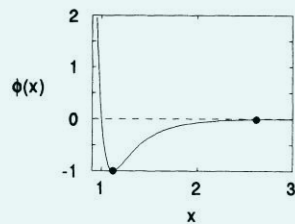
(D.Frenkel et al, Nature **365**,
425 (1993))



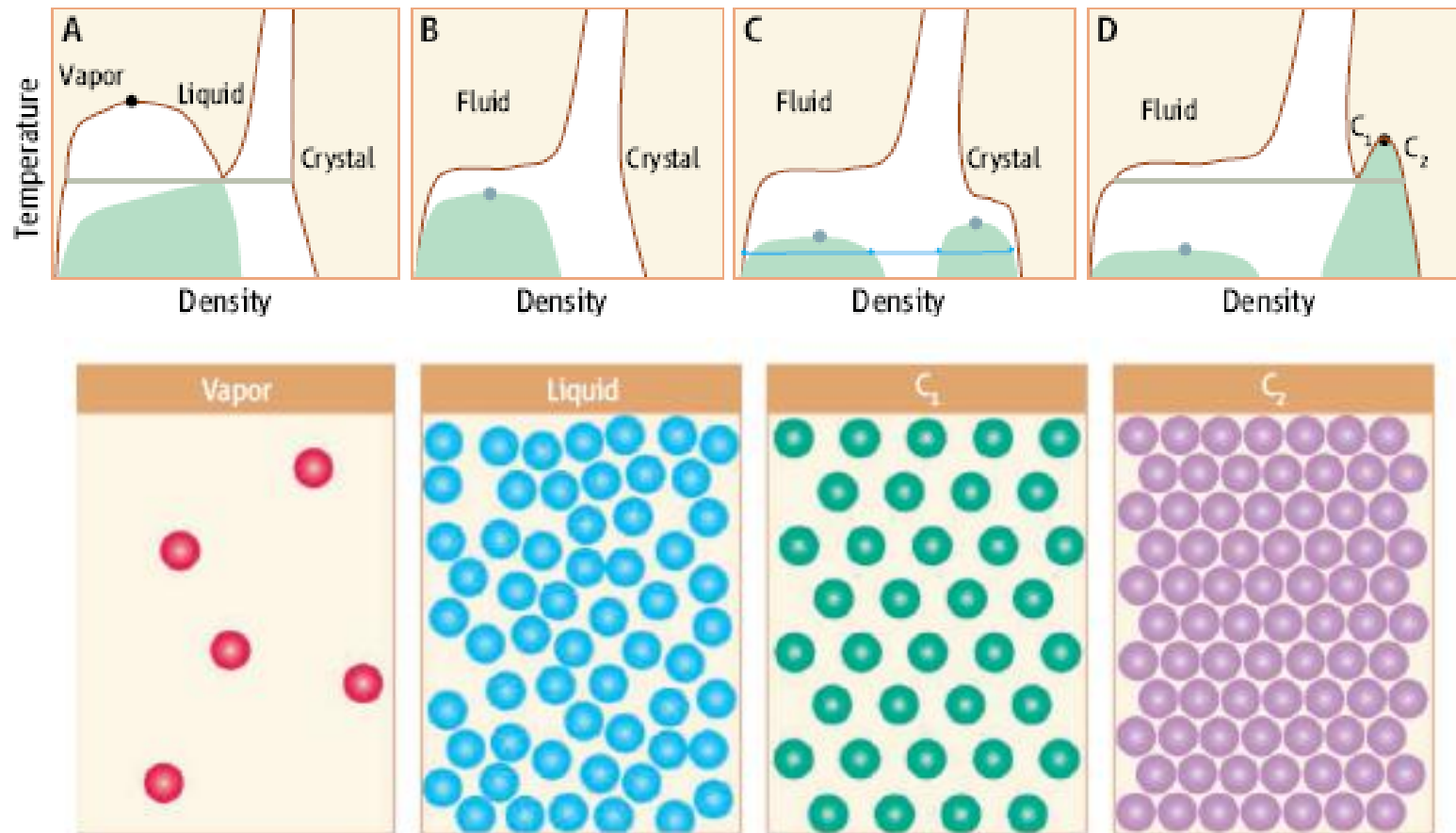
Притяжение

- Двойной потенциал Юкавы (M. Baus et al, Phys. Rev. Lett. 73, 752 (1994)):

$$u(r) = s\phi(r), \quad \phi(x) = \frac{c}{x} \left(e^{-a(x-1)} - e^{-b(x-1)} \right)$$



Обобщающая фазовая диаграмма (Daan Frenkel, Science 314, 768 (2006))



Притяжение

- Вывод: жидкая фаза устойчива, если ширина притягивающей части потенциала порядка 20-30% от общего радиуса потенциала.

Отталкивание

Отталкивание – «мягкие сферы» (R.Agrawal and D.A.Kofke, Phys. Rev. Lett. 74, 122 (1995))

кристаллизация:

$$u(r) = \varepsilon(\sigma / r)^n$$

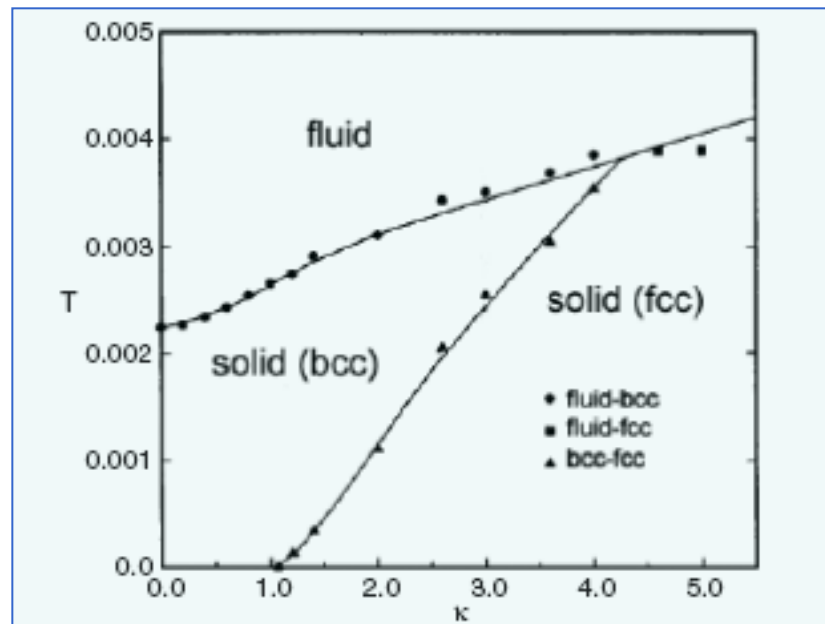
$n > 6.25$ – FCC Lattice

$n < 6.25$ – BCC Lattice

Отталкивание

Yukawa potential (E.J.Meijer and D.Frenkel, J. Chem. Phys. **94**, 2269 (1991); S.Hamaguchi et al, J. Chem. Phys. **105**, 7641 (1996), Phys. Rev. E **56**, 4671 (1997)):

$$u(r) = \varepsilon \frac{\exp(-\kappa r)}{r}$$

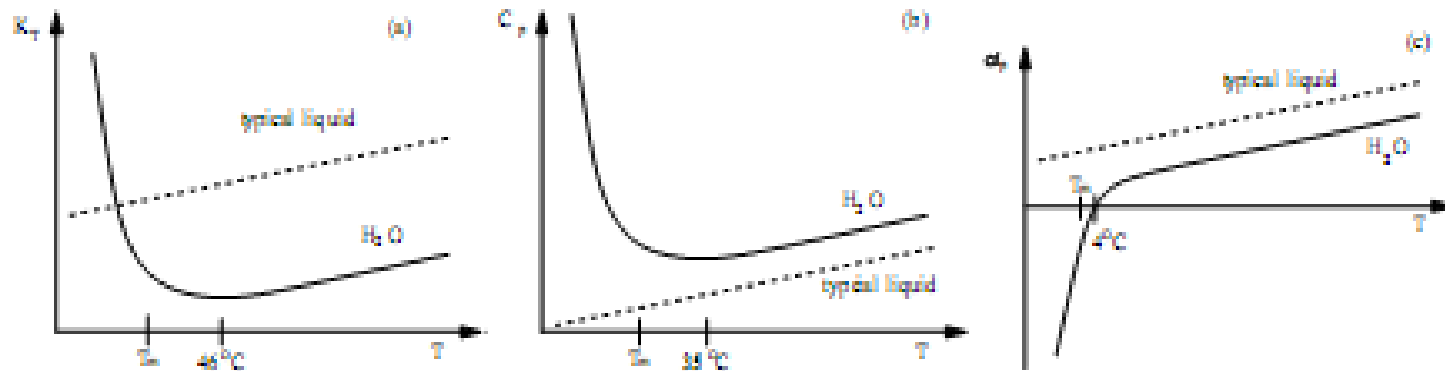


Аномальные жидкости

Вода – более 70 аномалий!

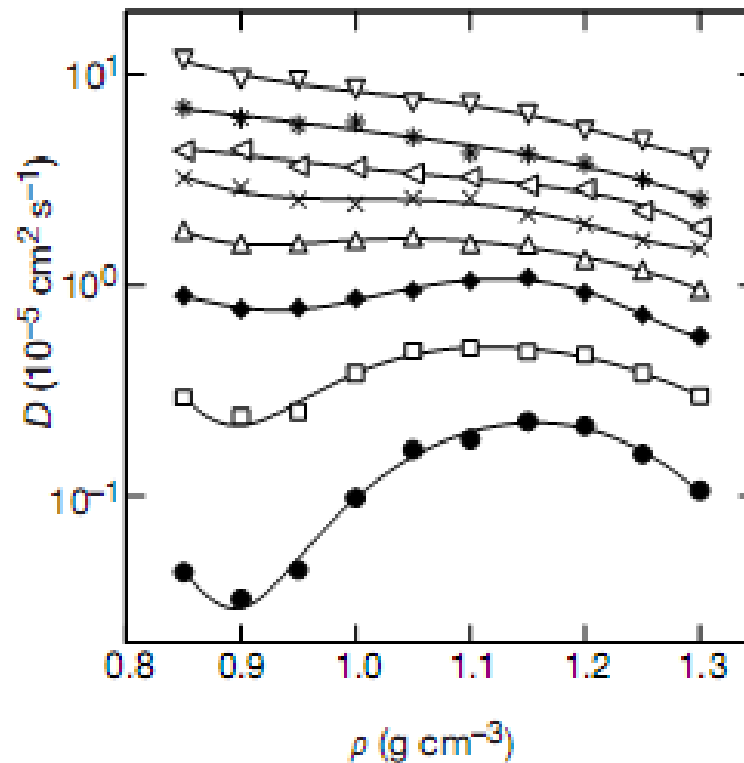
(<http://www.lsbu.ac.uk/water/anmlies.html>)

- a). Изотермическая сжимаемость
- b). Теплоемкость при постоянном давлении
- c). Коэффициент теплового расширения (Ga, Bi, Te, S, Be, Mg, Ca, Sr, Ba, SiO₂, P, Se, Ce, Cs, Rb, Co, Ge, Ge₁₅Te₈₅, SiO₂, S, BeF₂)



Аномальные жидкости

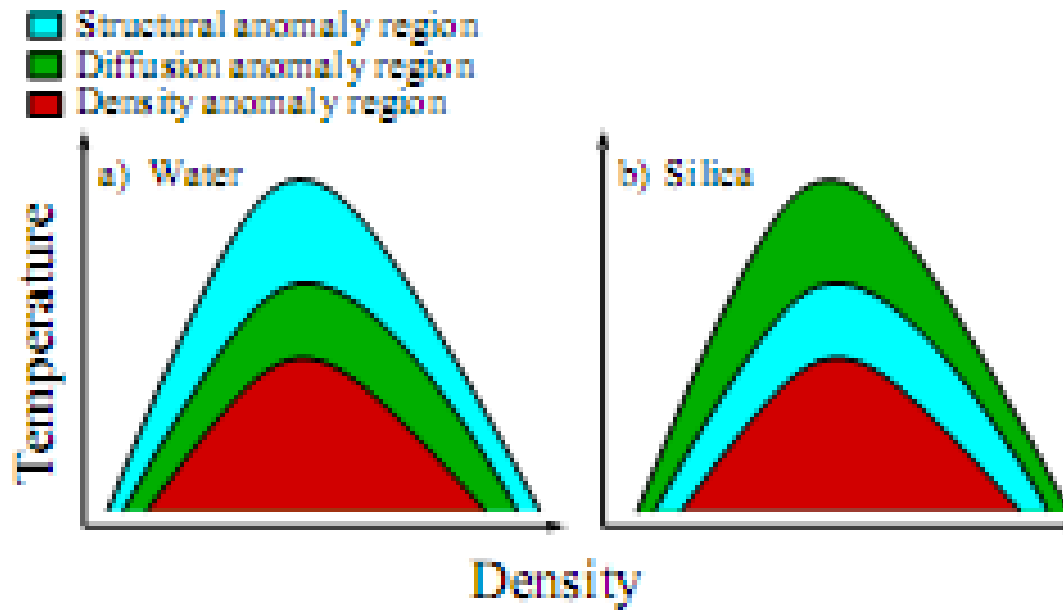
d). Аномалия диффузии (Jeffrey R. Errington & Pablo G. Debenedetti, Nature **409**, 318 (2001)).



Аномальные жидкости

е). Структурная аномалия.

Иерархия аномалий.



Аномальные жидкости

f). Полиморфизм, полиаморфизм, переход жидкость-жидкость:

High density liquid (HDL) and low density liquid (LDL) (P.H.Poole, F. Sciortino, U. Essmann, and H. E. Stanley, Nature (London) 360, 324 (1992)).

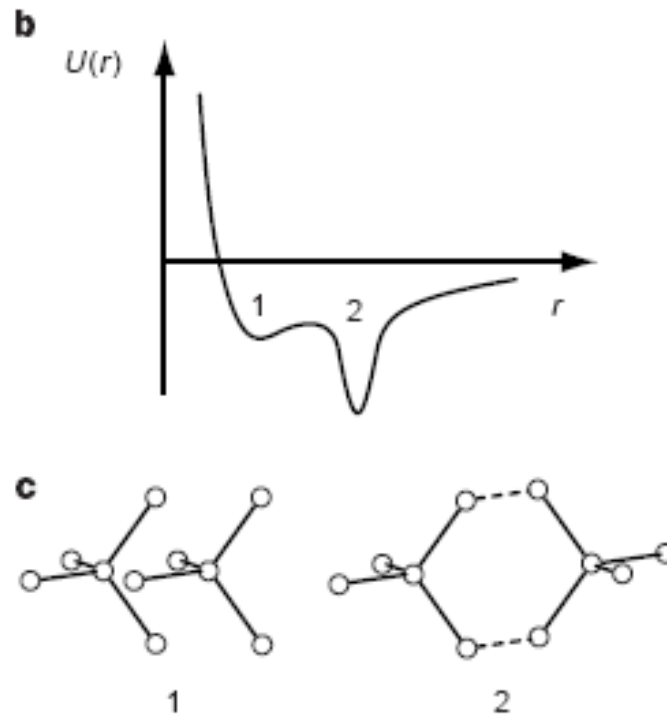
High density amorphous (HDA) and a low density amorphous (LDA) (O. Mishima, L. Calvert, and E. Whalley, Nature (London) 314, 76(1985)).

Very HDA (VHDA) (T. Loerting, C. Salzmann, I. Kohl, E. Mayer, and A. Hallbrucker, Phys. Chem. Chem. Phys. 3, 5355 (2001)).

LL phase transition: P (Y. Katayama et. al. , Nature (London) 403,170 (2000); (Y. Katayama et. al. , Science 306, 848(2004)), **Se** (V. V. Brazhkin, E .L. Gromnistkaya, O. V. Stalgorova, and A. G. Lyapin, Rev. High Pressure Sci. Technol. 7, 1129 (1998)).

Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания (примеры)

- Эффективный потенциал для воды: (O.Mishima and H.E. Stanley, Nature 396, 329 (1998))



Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания (примеры)

■ Эффективные потенциалы для металлов

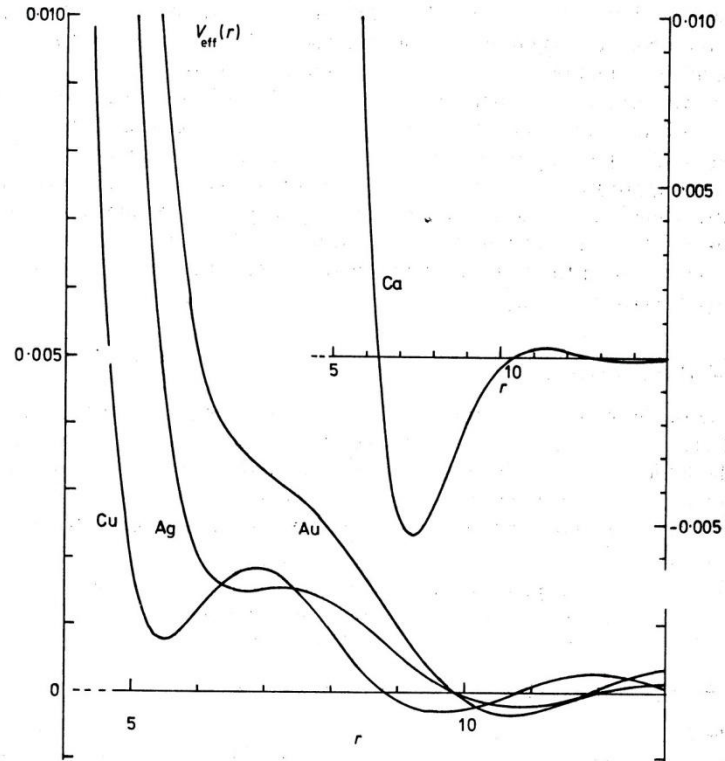
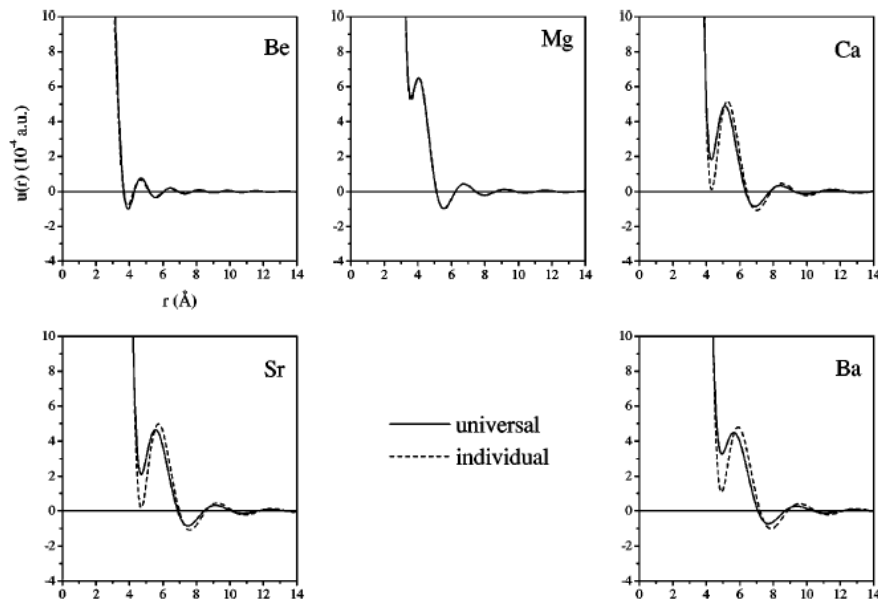


Figure 1. The effective interionic potential $V_{\text{eff}}(r)$ for solid copper, silver, gold and calcium. All quantities are in atomic units.

Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

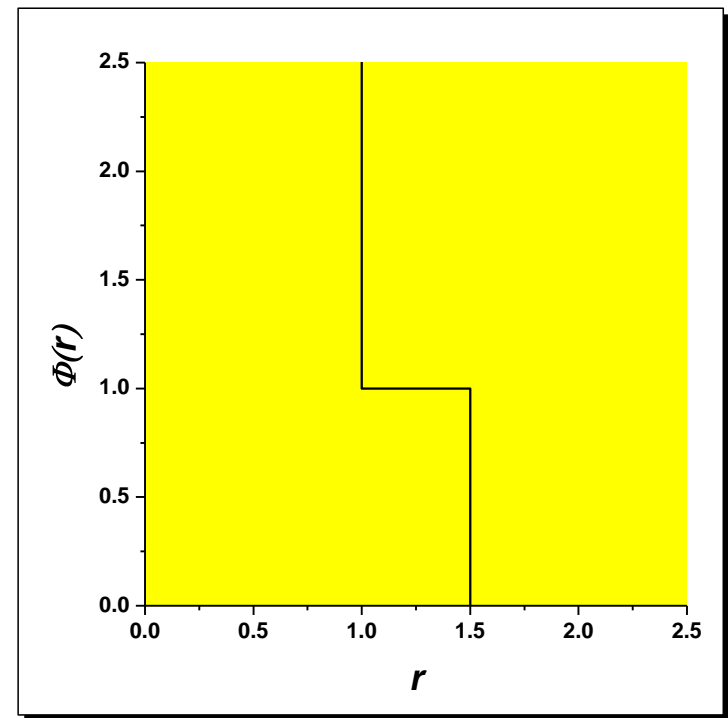
- «Коллапсирующие твердые сферы» (D.A.Young and B.J.Alder, Phys. Rev. Lett. **38**, 1233 (1977), S. M. Stishov, Phil. Mag. B **82**, 1287 (2002))

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d \\ \varepsilon, & d < r \leq \sigma \\ 0, & r > \sigma \end{cases}$$

d – диаметр твердой сферы

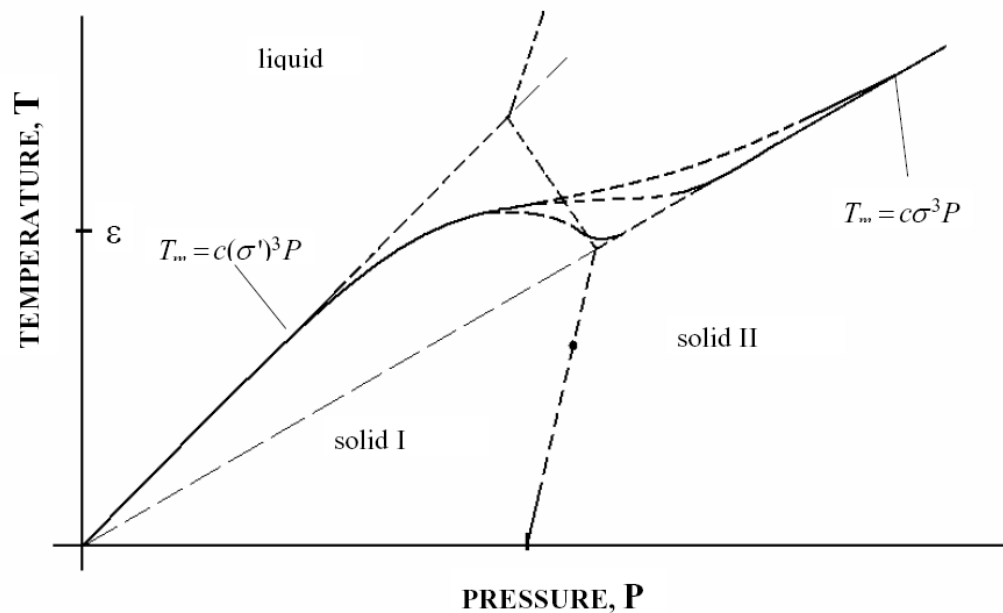
σ – ширина ступеньки

ε – высота ступеньки



Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

- Схематическая фазовая диаграмма коллапсирующих твердых сфер (S. M. Stishov, Phil. Mag. B **82**, 1287 (2002)).



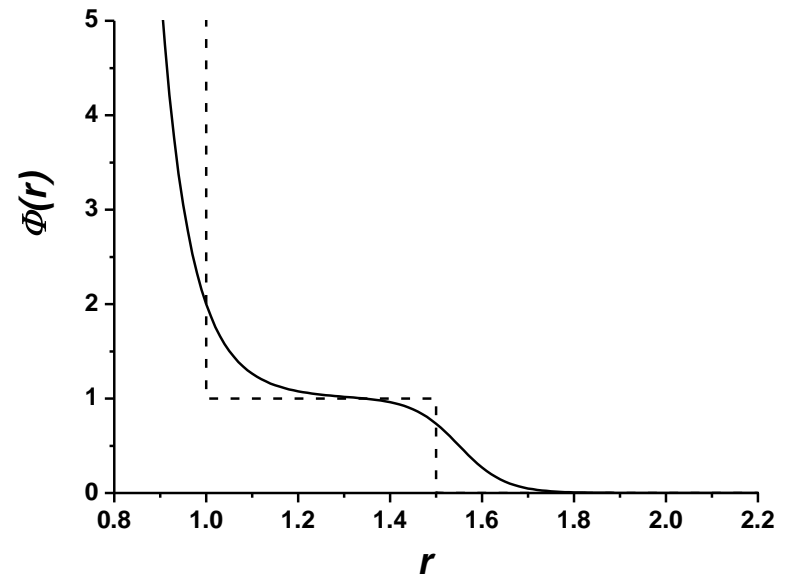
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

- Компьютерное моделирование (Yu. D. Fomin, Daan Frenkel, N.V.Gribova, V.N.Ryzhov, S.M. Stishov, Journal of Chemical Physics 129, 064512 (2008)); N.V. Gribova, Yu.D. Fomin, V.N. Ryzhov, Daan Frenkel, Phys. Rev. E 79, 051202 (2009); Yu.D. Fomin, N.V. Gribova, V.N. Ryzhov, Phys. Rev. E 81, 061201 (2010)).

Сглаженный потенциал

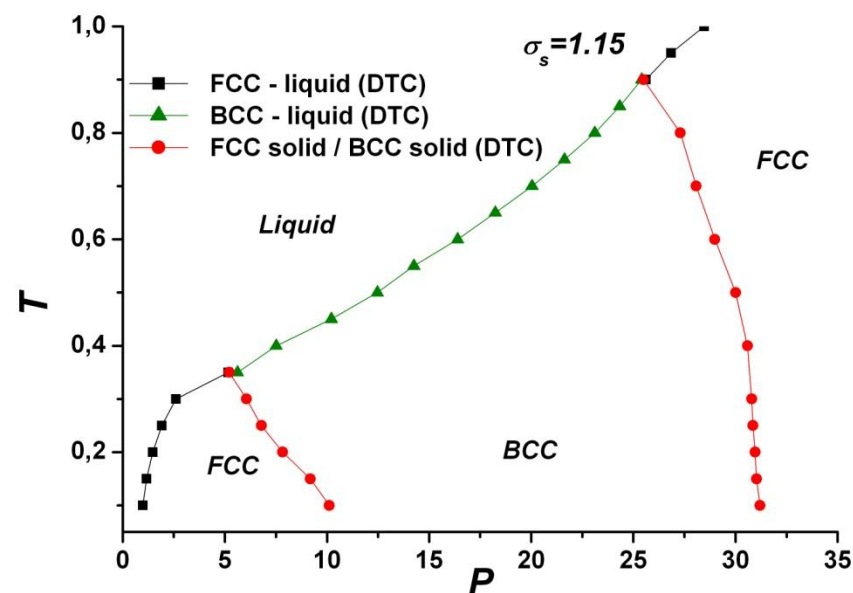
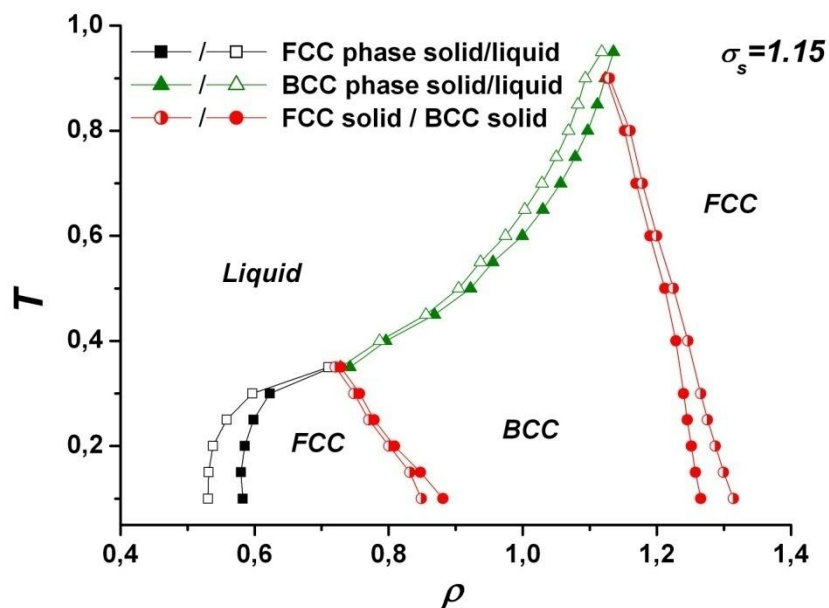
$$\Phi(r) = \left(\frac{d}{r}\right)^n + \frac{1}{2}\varepsilon (1 - \tanh(k_0(r - \sigma_s)))$$

здесь $n=14$, $k=10$ $\sigma=1.15, 1.35, 1.55, 1.8$



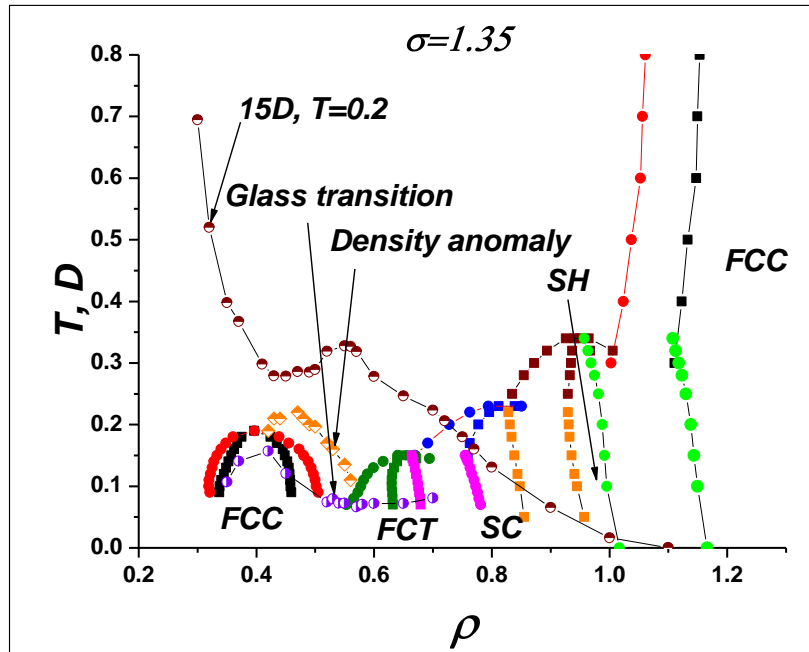
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Phase diagrams in 3 D ($\sigma = 1.15$):



Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

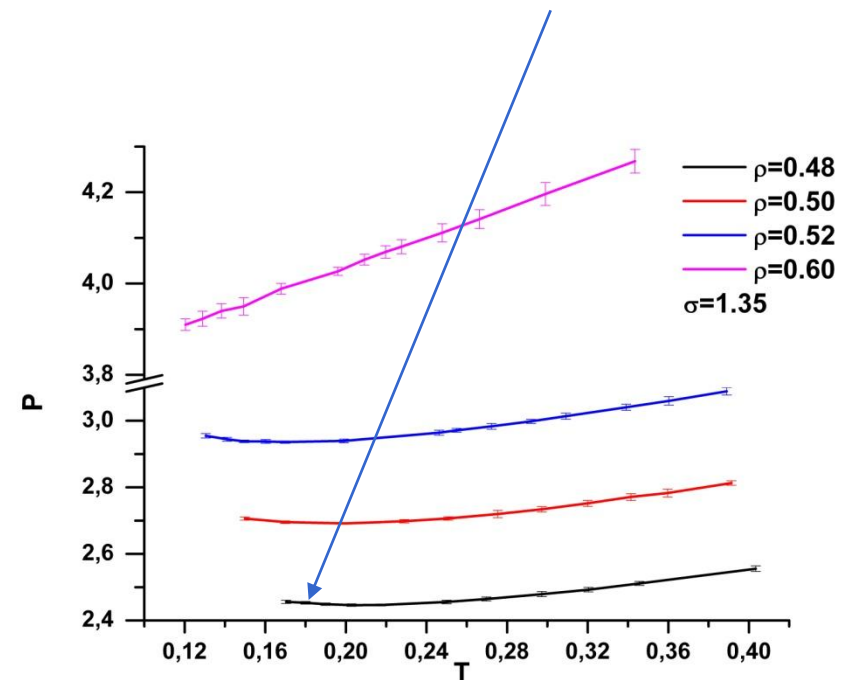
Phase diagram for $\sigma=1.35$ with diffusion and structural anomalies and glass transition line.



$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{\alpha_P}{\kappa_T}$$

$$\kappa_T > 0$$

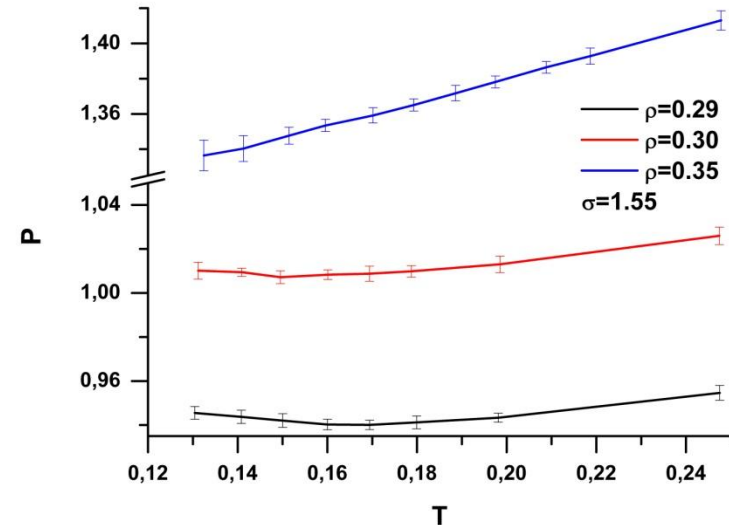
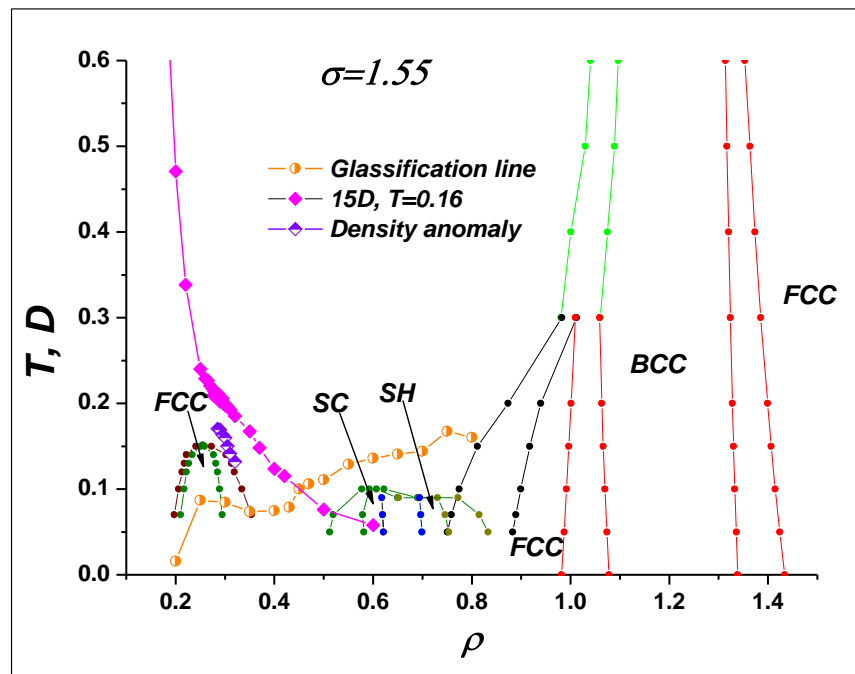
$$\alpha_P < 0$$



Minima on isochores

Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

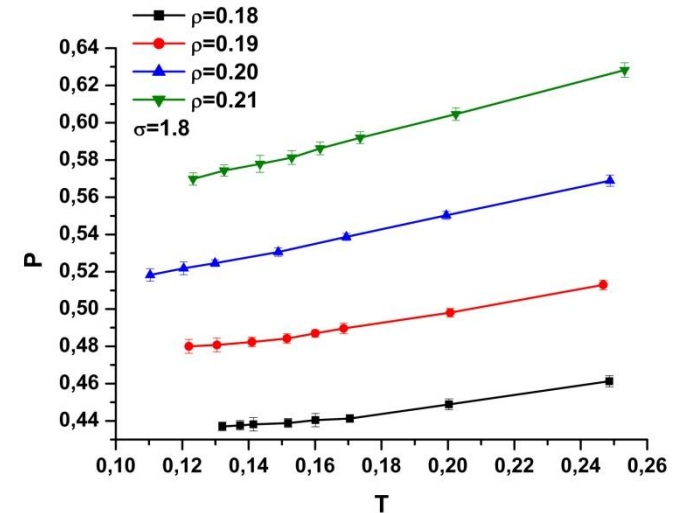
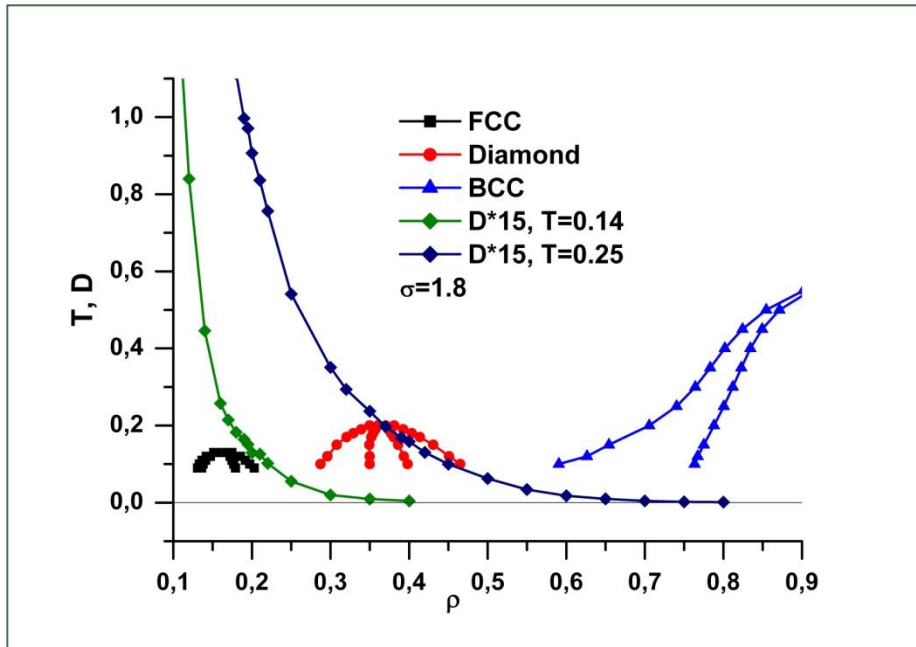
Phase diagram for $\sigma = 1.55$ with diffusion and structural anomalies and glass transition line.



Minima on isochores

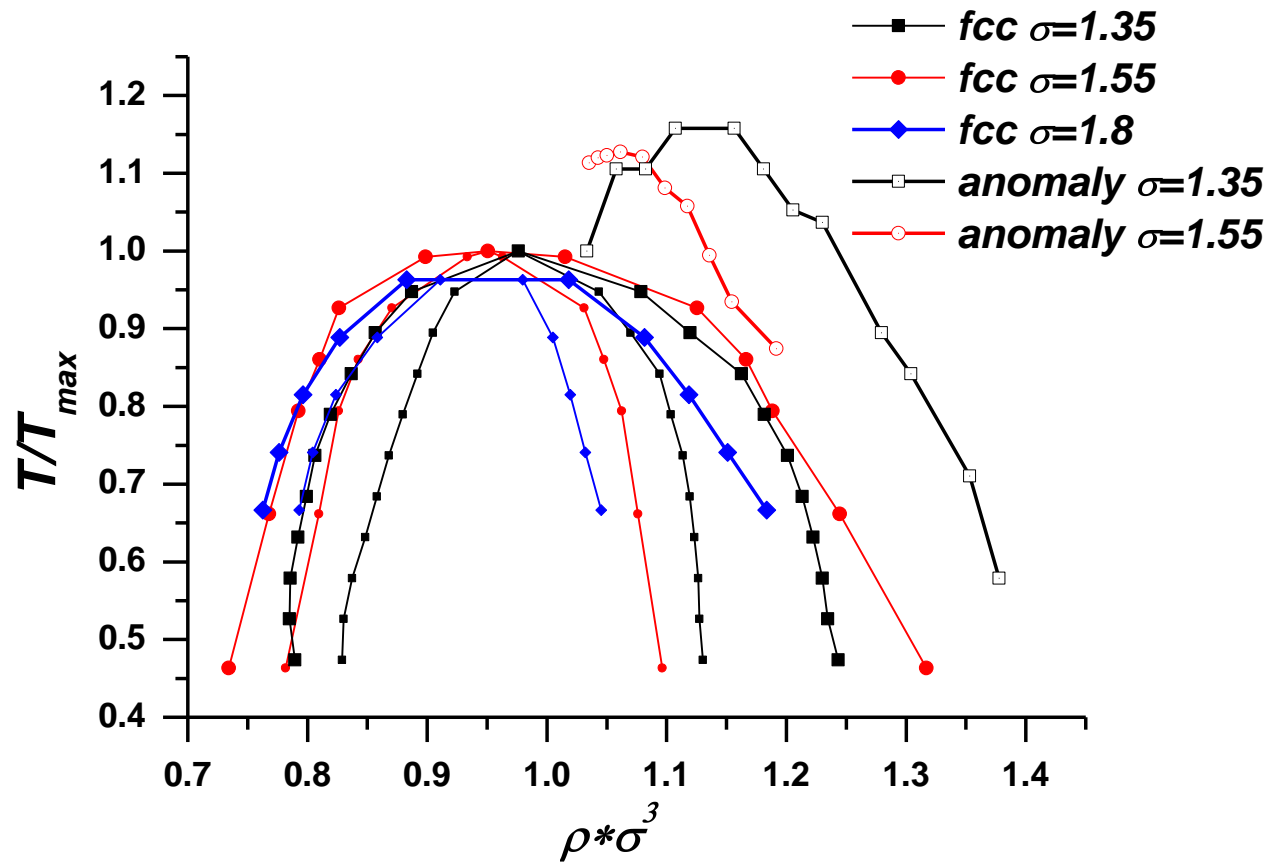
Repulsive step potential - computer simulations

Phase diagram for $\sigma = 1.8$, no anomalies



No minima on isochores!!!

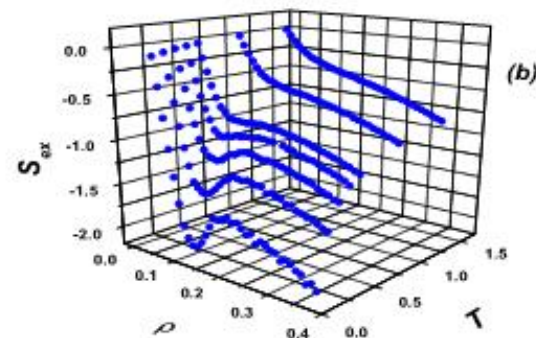
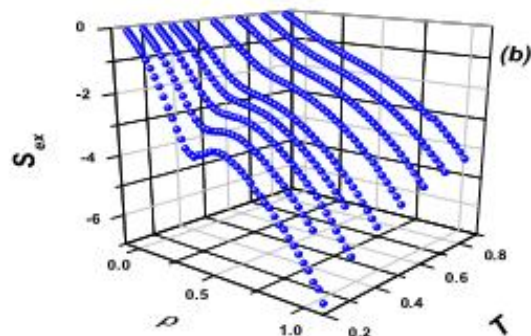
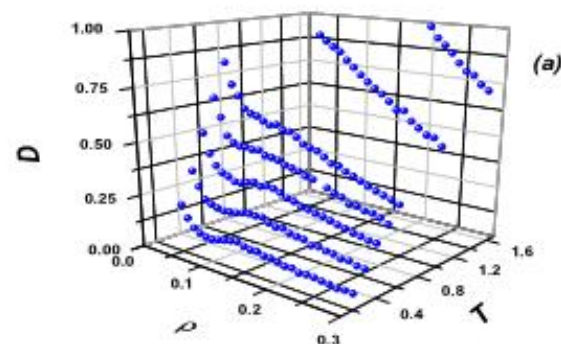
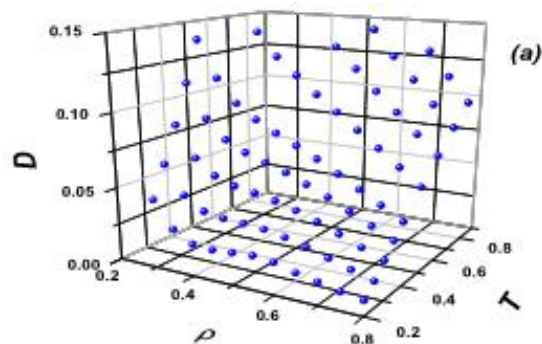
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания



Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

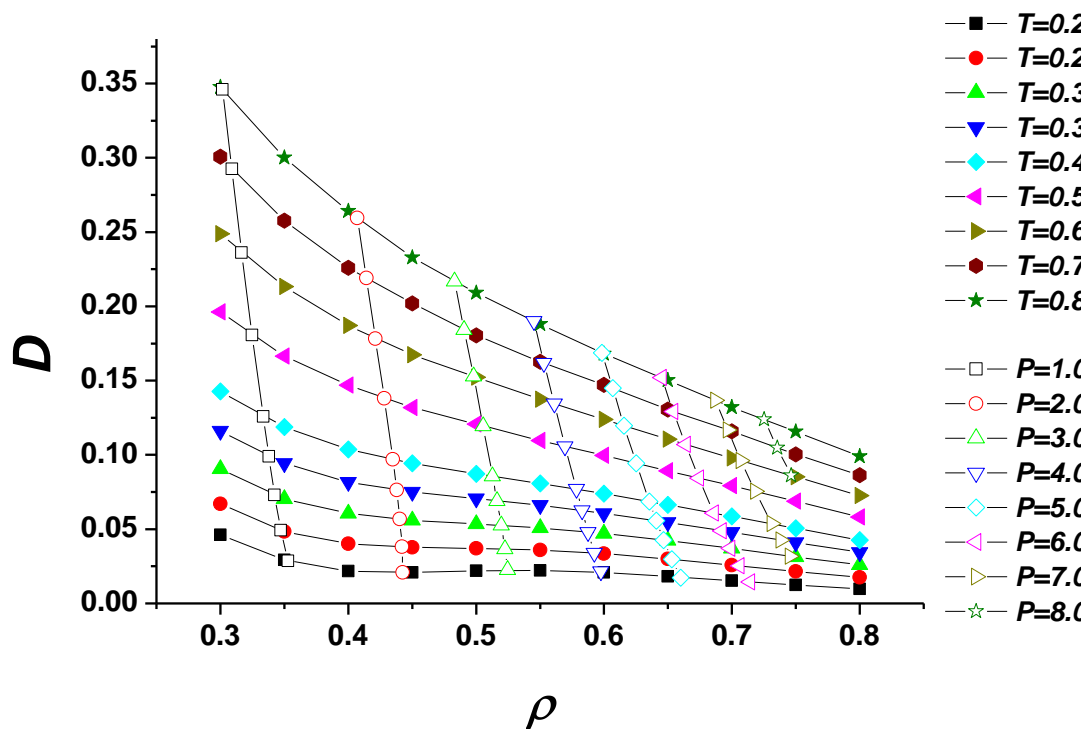
Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных

$$U(r) = \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{14} + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot [1 - \tanh(k_0\{r - \sigma_1\})] \quad U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right] + a\varepsilon \cdot \exp \left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{r - r_0}{\sigma} \right)^2 \right]$$



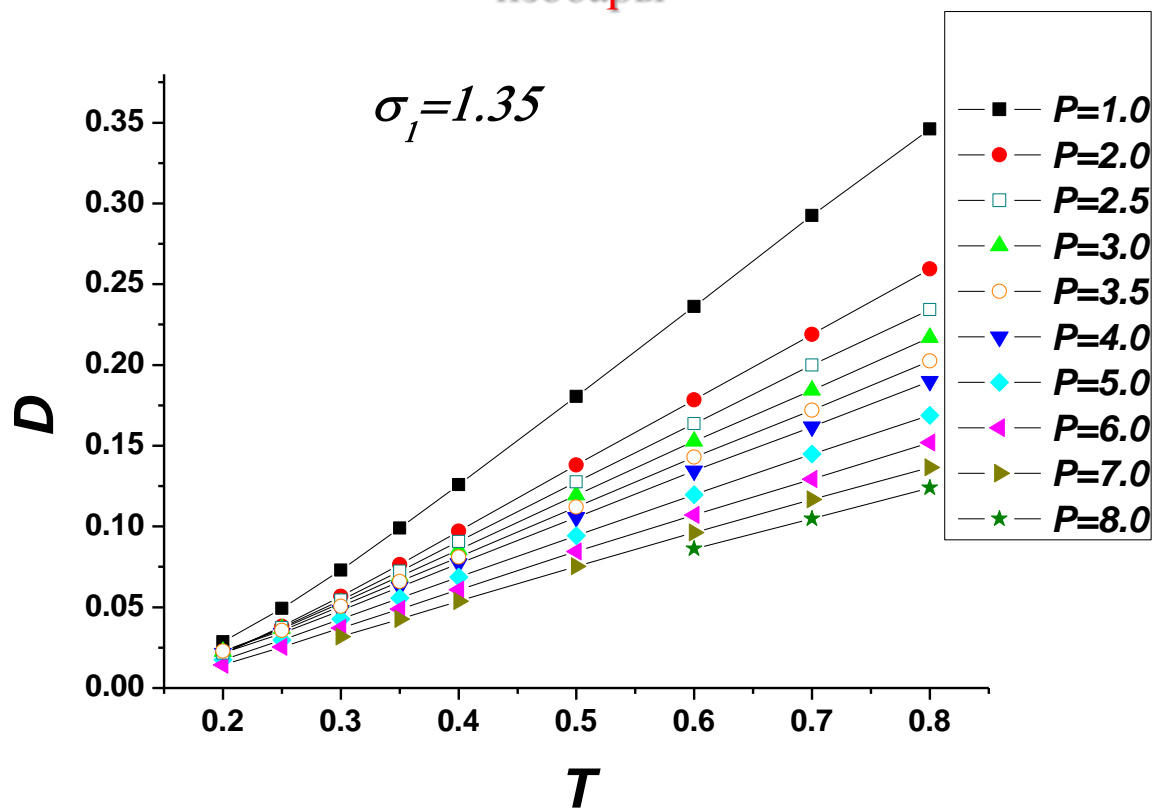
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных:
изобары



Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

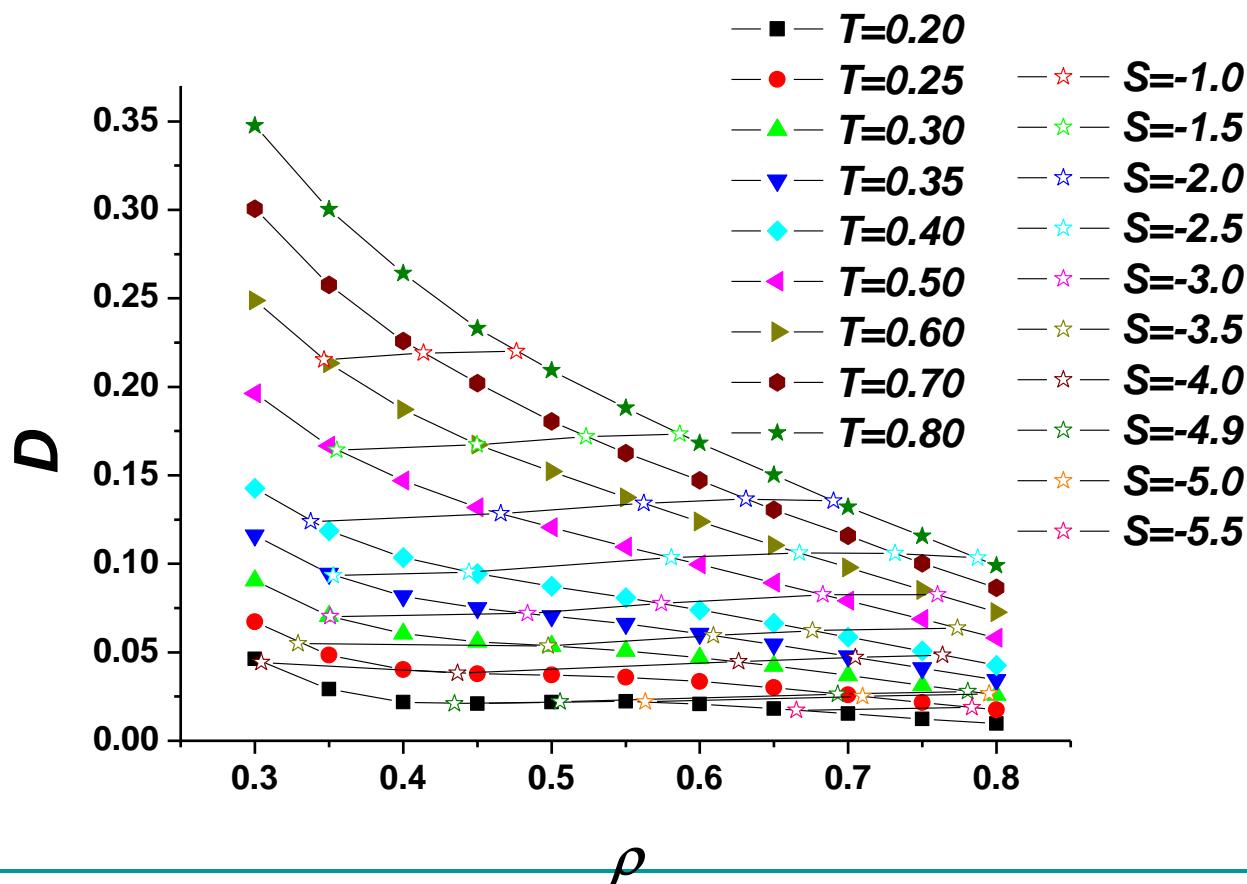
Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных: изобары



Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

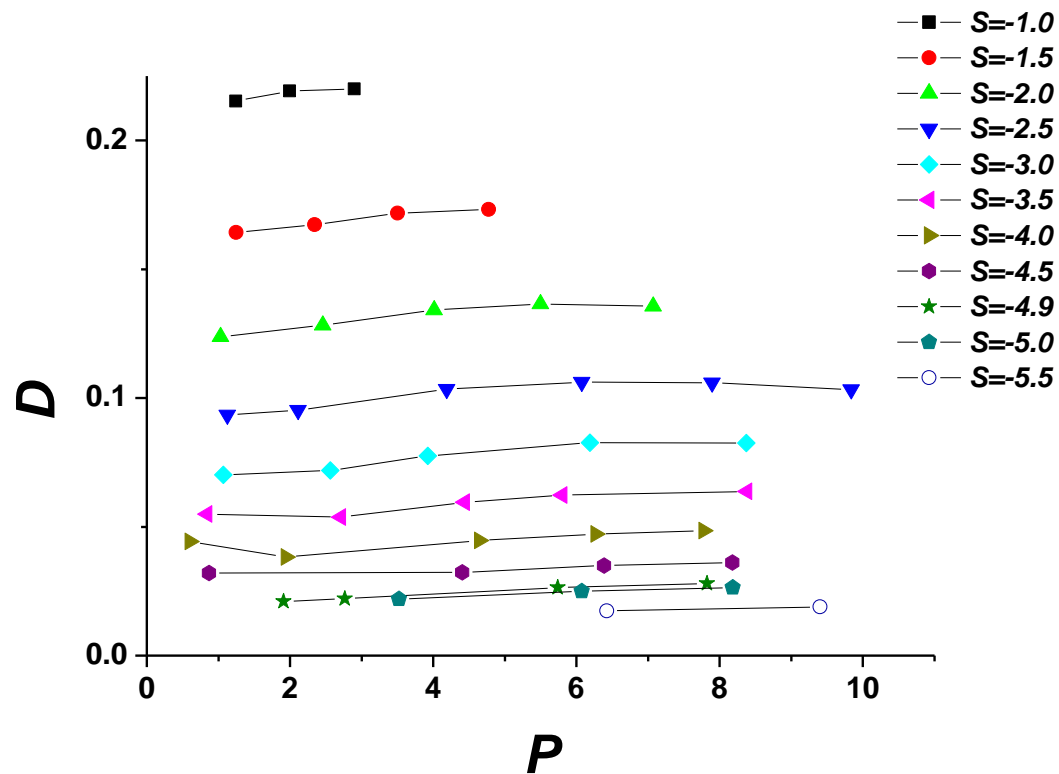
Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных:

адиабаты



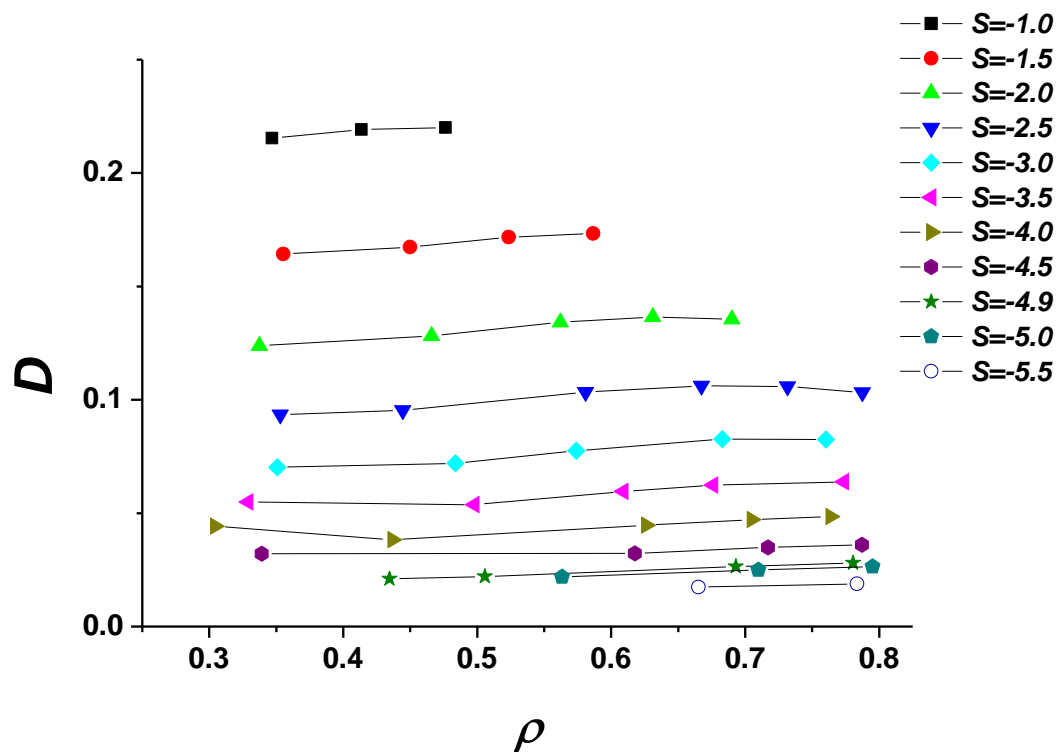
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных:
адиабаты

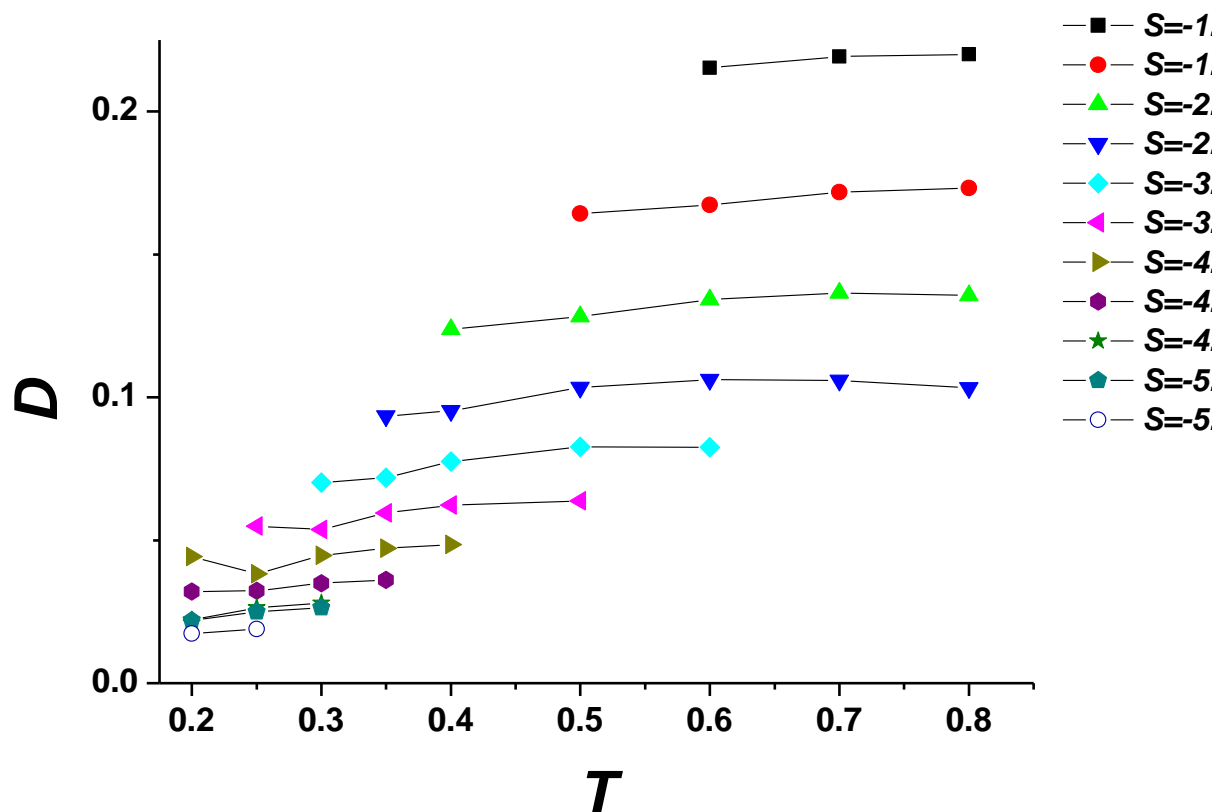


Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных:
адиабаты



Зависимость аномалий от траектории в пространстве ТД переменных: адиабаты



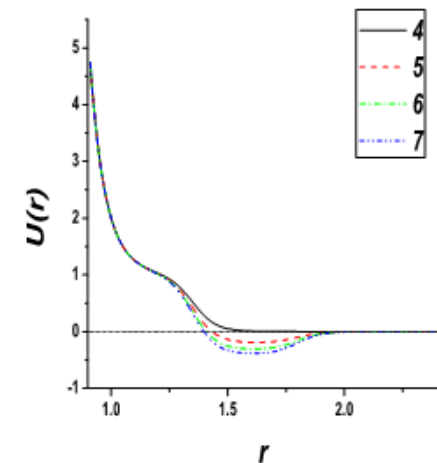
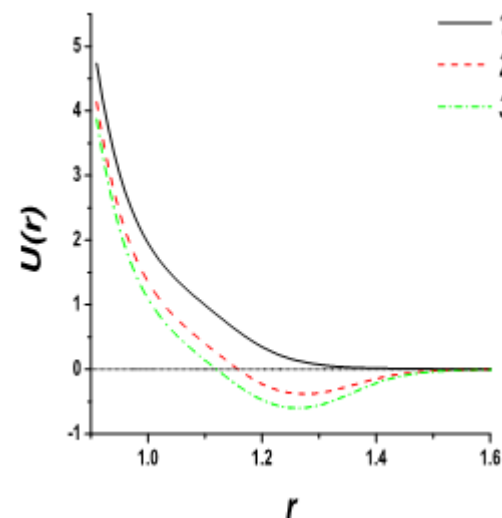
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Зависимость аномалий от траектории в пространстве
ТД переменных: аномалия диффузии существует вдоль
изотерм и адиабат, но отсутствует вдоль изохор и
изобар!

Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

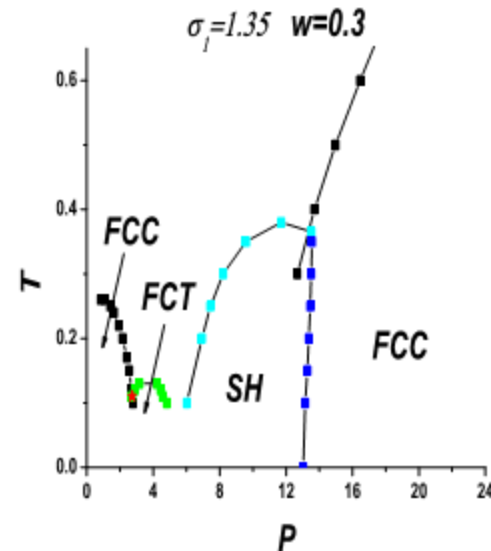
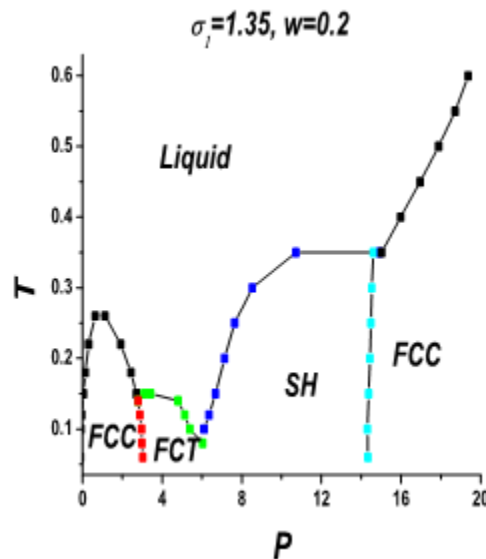
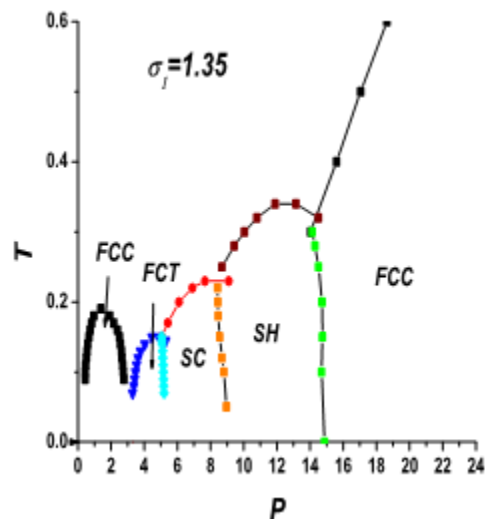
Влияние притяжения $U(r) = \varepsilon \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{14} + \lambda_0 - \lambda_1 \tanh(k_1 \{r - \sigma_1\}) + \lambda_2 \tanh(k_2 \{r - \sigma_2\})$.

number	σ_1	σ_2	λ_0	λ_1	λ_2	well depth
1	1.15	0	0.5	0.50	0	0
2	1.15	1.35	0.2	0.5	0.3	0.4
3	1.15	1.35	0.07	0.5	0.43	0.60
4	1.35	0	0.5	0.5	0	0
5	1.35	1.80	0.5	0.60	0.10	0.20
6	1.35	1.80	0.5	0.66	0.16	0.30
7	1.35	1.80	0.5	0.7	0.20	0.4



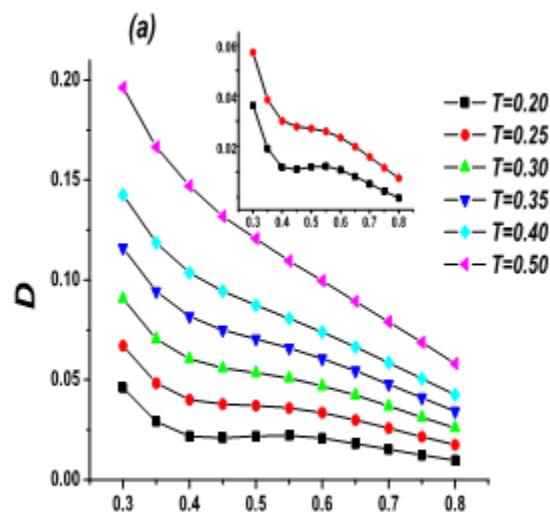
Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Влияние притяжения – эволюция фазовой диаграммы с увеличением глубины притягивающей ямы

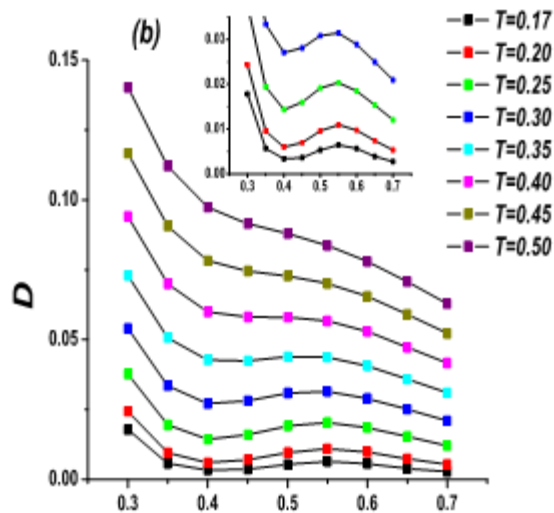


Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания

Влияние притяжения – эволюция аномалии диффузии с увеличением глубины притягивающей ямы



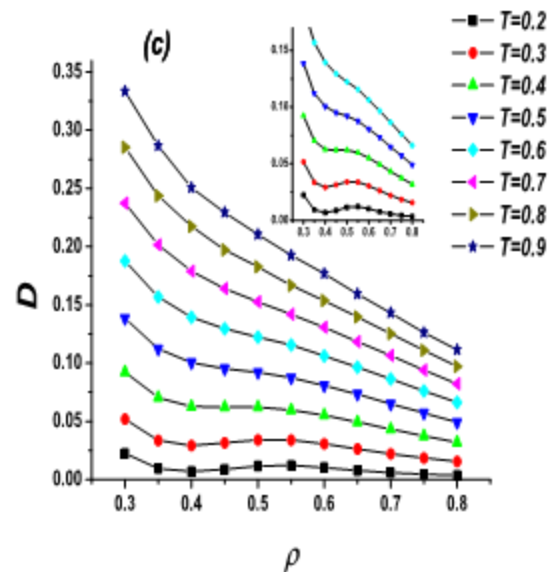
$$\sigma_1 = 1.35$$



$$\sigma_1 = 1.35 \text{ and } w = 0.2$$

$$\sigma_1 = 1.35$$

$$w = 0.4$$



Переход в стекло – приближение связанных мод (Mode-Coupling Approximation) (U. Bengtzelius, W. Gotze, and A. Sjolander, J. Phys. C 17, 5917 (1984); W. Gotze and L. Sjorgren, Rep. Prog. Phys. 55, 241 (1992)).

$$H(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = \sum_n \frac{1}{2m} \mathbf{p}_n^2 + V(\{\mathbf{x}_i\}), \quad V(\{\mathbf{x}_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

$$\mathbf{x}_i(t) = e^{i\mathcal{L}t} \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{p}_i(t) = e^{i\mathcal{L}t} \mathbf{p}_i.$$

Микроскопическая плотность

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$$

Медленная переменная

$$\rho(\mathbf{q}, t) = \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_n(t)} = e^{i\mathcal{L}t} \rho(\mathbf{q})$$

Переход в стекло – приближение связанных мод (Mode-Coupling Approximation)

■ Normalized correlator $\Phi(\mathbf{q}, t) \equiv \hat{S}(\mathbf{q}, t) / S(\mathbf{q})$

$$S(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{N} \langle \rho(\mathbf{q}, t)^* \rho(\mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{N} \langle \rho^*(\mathbf{q}) e^{-i\mathcal{L}t} \rho(\mathbf{q}) \rangle$$

The exact Zwanzig-Mori equation

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}, t) + \Omega_q^2 \Phi(\mathbf{q}, t) + \int_0^t dt' M(\mathbf{q}, t - t') \dot{\Phi}(\mathbf{q}, t') = 0$$

$$M(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{N} \frac{m}{k_B T} \frac{1}{q^2} \langle \ddot{\rho}(\mathbf{q})^* Q e^{-iQ\mathcal{L}Qt} Q \ddot{\rho}(\mathbf{q}) \rangle \quad \Omega_q = \left(\frac{k_B T}{m} \frac{q^2}{S(\mathbf{q})} \right)^{1/2}.$$

Glass transition - Mode Coupling Theory (MCT)

U. Bengtzelius, W. Gotze, and A. Sjolander, J. Phys. C **17**, 5917 (1984); W. Gotze and L. Sjorgen, Rep. Prog. Phys. **55**, 241 (1992).

Equation for density-density correlation function $\phi_q(t) = \frac{\langle \rho_{\vec{q}}^*(t) \rho_{\vec{q}} \rangle}{\langle |\rho_{\vec{q}}|^2 \rangle}.$

$$\ddot{\phi}_q(t) + \Omega_q^2 \phi_q(t) + \nu_q \dot{\phi}_q(t) + \Omega_q^2 \int_0^t m_q(t-t') \dot{\phi}_q(t') dt' = 0$$

Mode coupling memory functional $m_q(f) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_{\vec{q}, \vec{k}} f_k f_{|\vec{q}-\vec{k}|}.$

$$V_{\vec{q}, \vec{k}} \equiv S_q S_k S_{|\vec{q}-\vec{k}|} \frac{\rho}{q^4} \left[\vec{q} \cdot \vec{k} c_k + \vec{q} \cdot (\vec{q} - \vec{k}) c_{|\vec{q}-\vec{k}|} \right]^2 \quad \Omega_q = \frac{q^2 k_B T}{m S(q)}$$

Structure factor $S_q = 1/(1 - \rho c_q)$ $\nu_q = \nu_1 q^2$

Glass transition - Mode Coupling Theory (MCT)

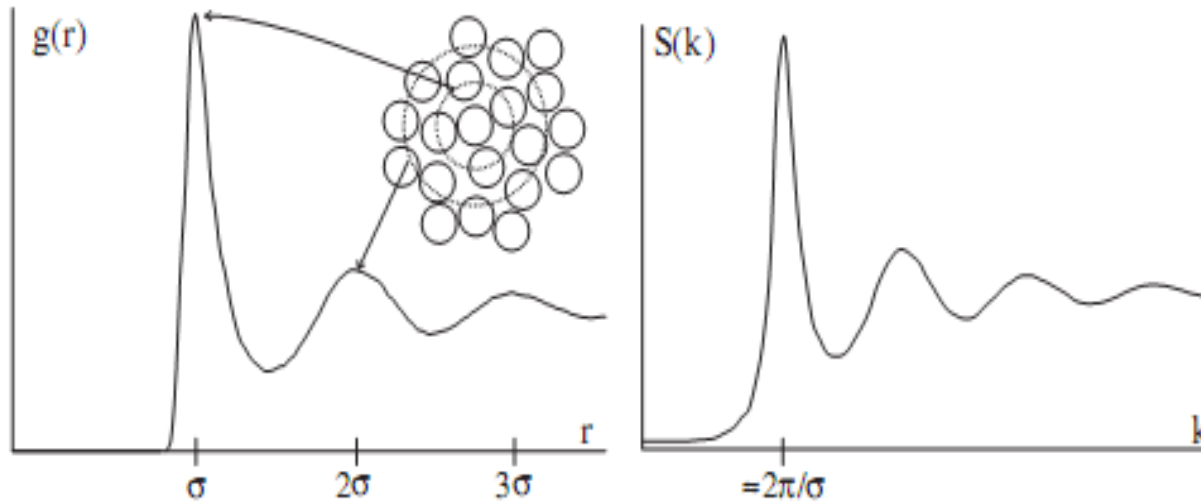
In the long-time limit the non-ergodicity factor (glass order parameter) has the form:

$$f_q = \frac{\langle \rho_q^*(0) \rho_q(\infty) \rangle}{\langle |\rho_q(0)|^2 \rangle}$$

The MCT equation in the static limit gives rise to the bifurcation relation:

$$\frac{f_q}{1 - f_q} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{q}, \mathbf{k}) f_k f_{|\mathbf{q}-\mathbf{k}|}$$

Переход в стекло – приближение связанных мод (Mode-Coupling Approximation)



Уравнение Орнштейна-Цернике

$$h(r) = c(r) + \rho \int c(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) h(r') d\mathbf{r}'$$

$$h(r) = g(r) - 1$$

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \rho_0 \hat{h}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 - \rho_0 \hat{c}(k)}$$

Переход в стекло – приближение связанных мод (Mode-Coupling Approximation)

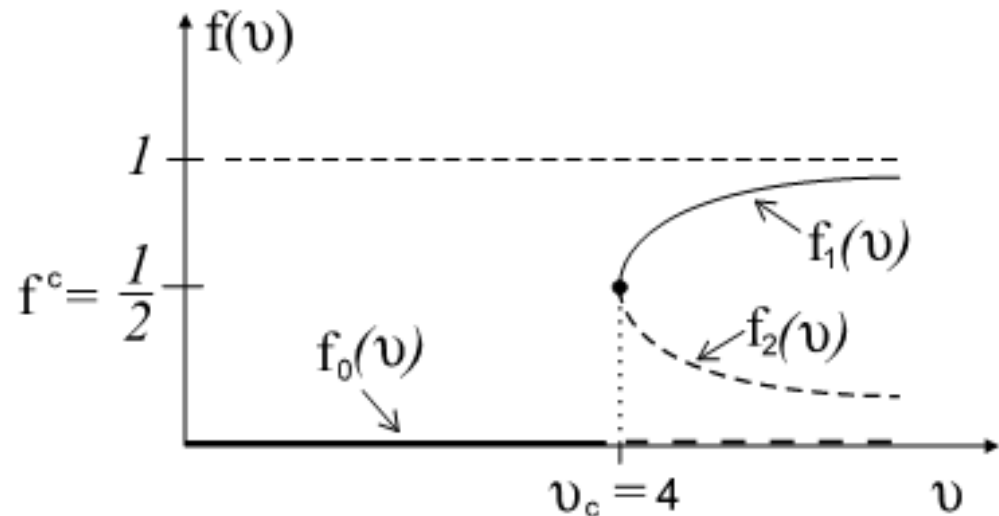
■ Схематическая модель

$$\frac{1}{1-f} = v f^2$$

$$S(q) = 1 + A\delta(q - q_0)$$

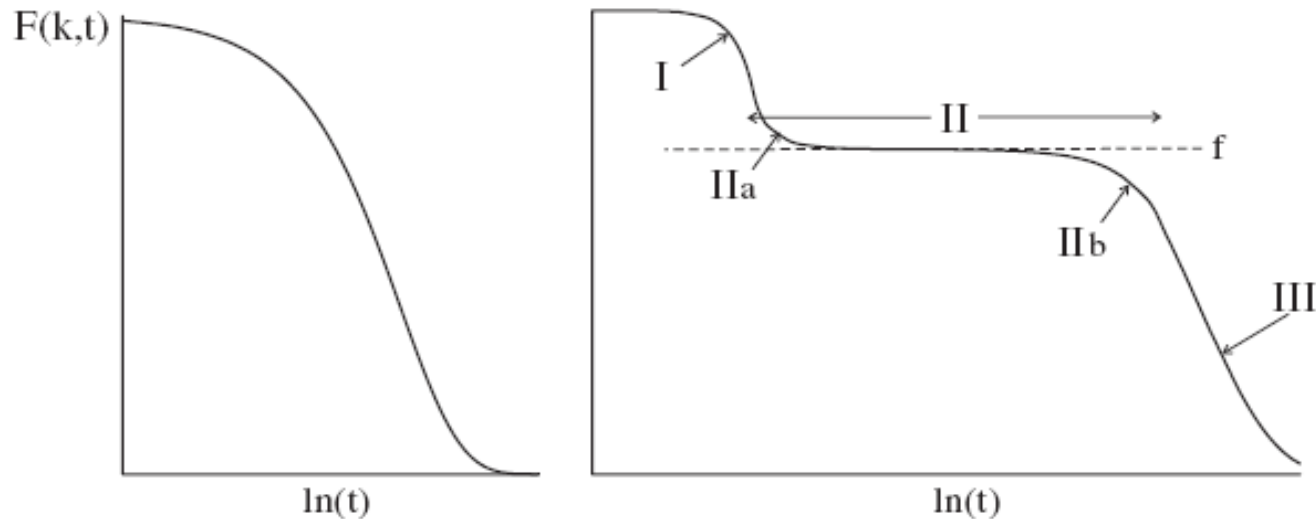
$$v = \frac{q_0 A^2}{8\pi^2 \rho} S(q_0)$$

$$f(v) = \begin{cases} 0 & , \quad v < v_c \\ \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - v_c/v}] & , \quad v \geq v_c \end{cases}$$



Glass transition – Mode Coupling Approximation (MCT)

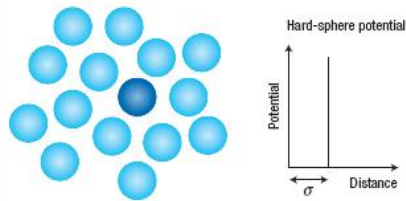
$$F(k, t) = \frac{1}{N} \langle \rho_{-\mathbf{k}}(0) \rho_{\mathbf{k}}(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \langle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i(0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j(t)} \rangle$$



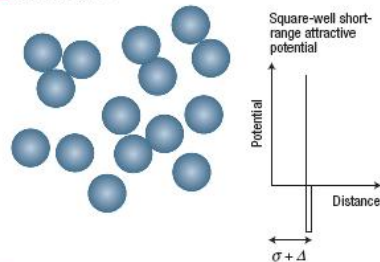
$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\langle r^2(t) \rangle} / 6t. \quad D, 1/\tau_\alpha \propto (T - T_c)^\gamma \quad \gamma \geq 1.75$$

Переход стекло-стекло в приближении связанных мод (F. SCIORTINO, Nature Materials, 1, 145 (2002))

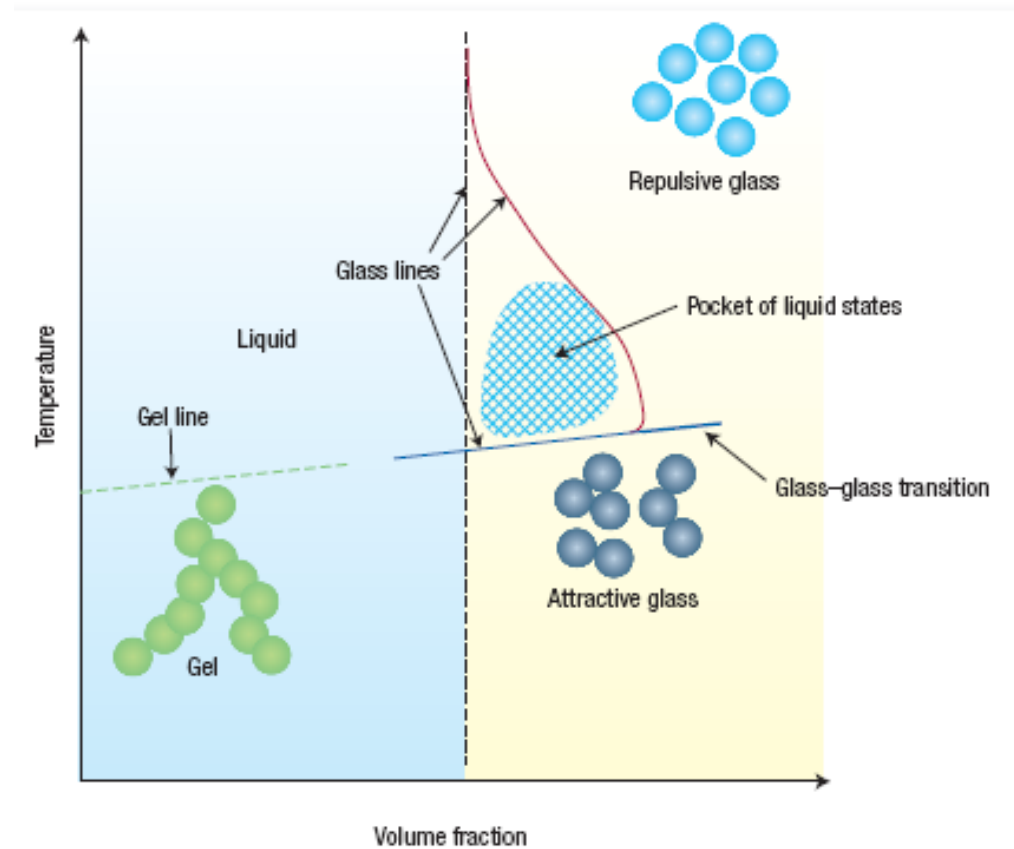
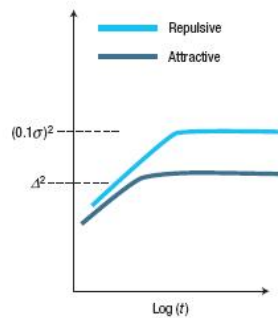
a Hard-sphere (repulsive) glass



b Attractive glass

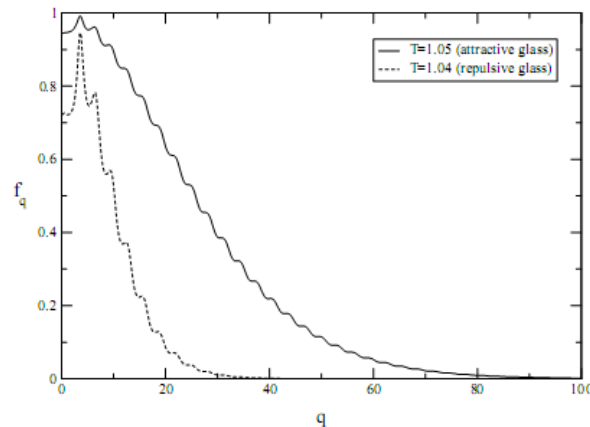
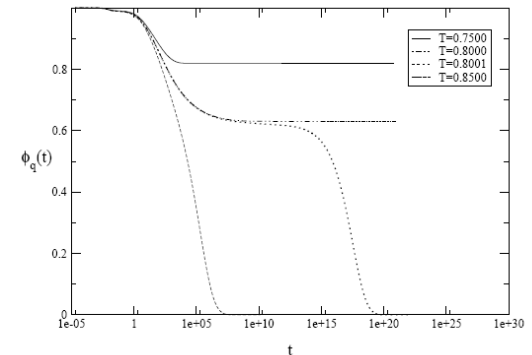
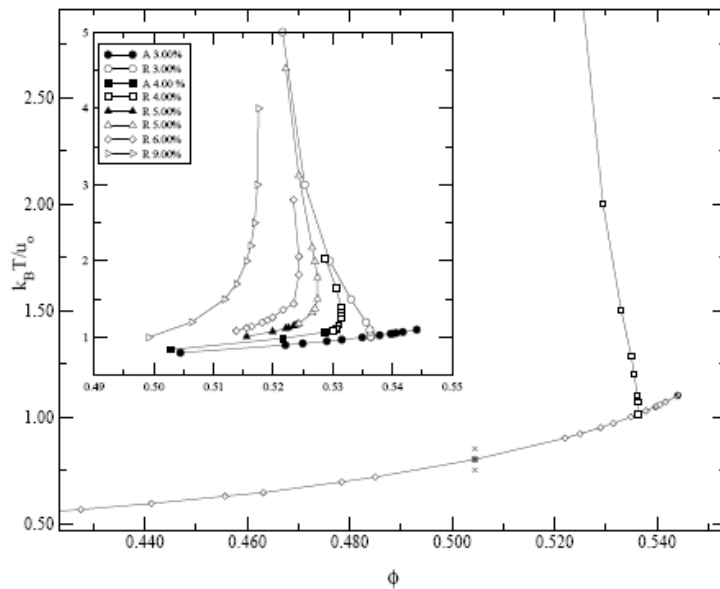


c Mean squared displacement



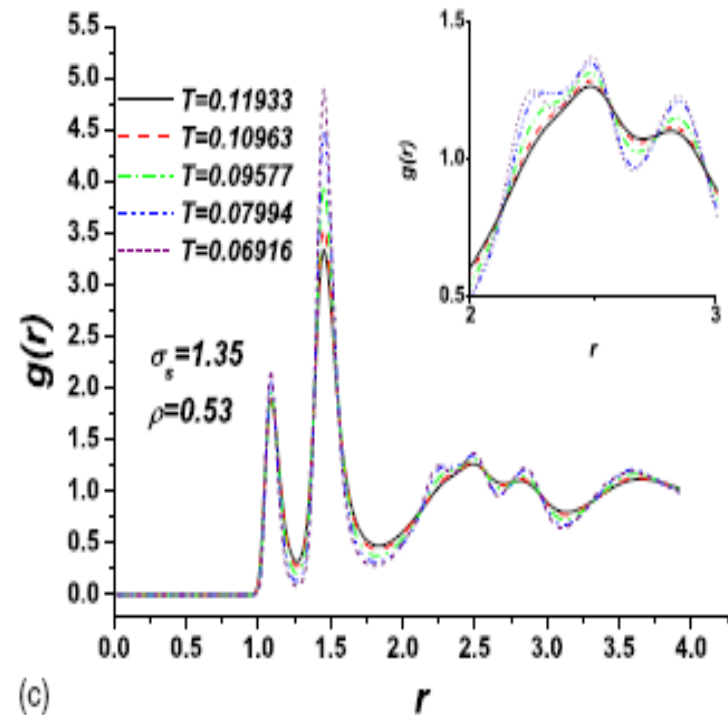
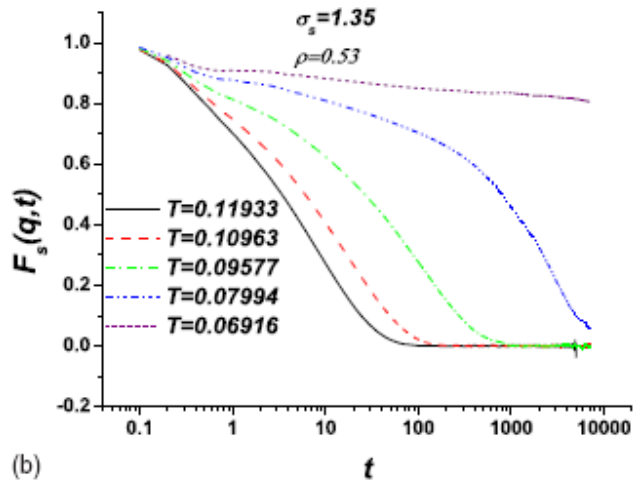
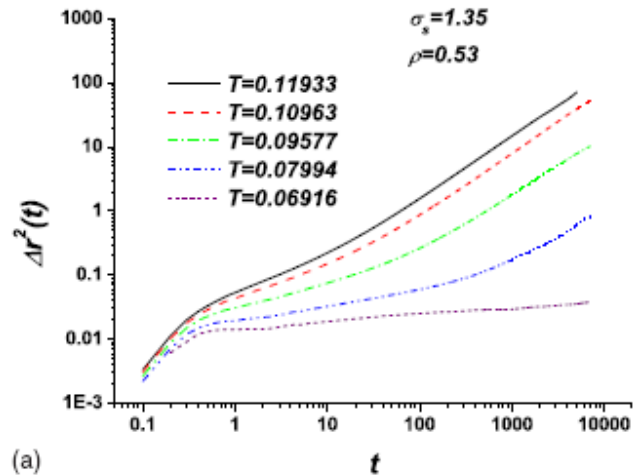
Переход стекло-стекло в приближении связанных мод

(K. Dawson et al., Phys. Rev. E 63, 011401 (2001); E. Zaccarelli, G. Foffi, K. A. Dawson, F. Sciortino, P. Tartaglia, Phys. Rev. E 63, 031501 (2001); L. Fabbian, W. Go tze, F. Sciortino, P. Tartaglia, F.Thiery, Phys. Rev. E 59, R1347 (1999).)



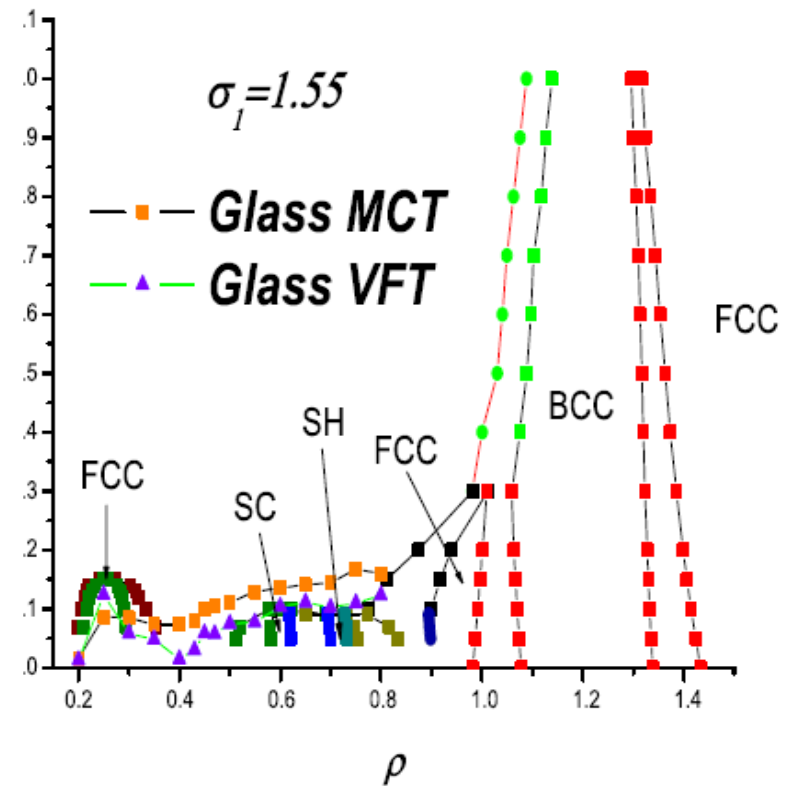
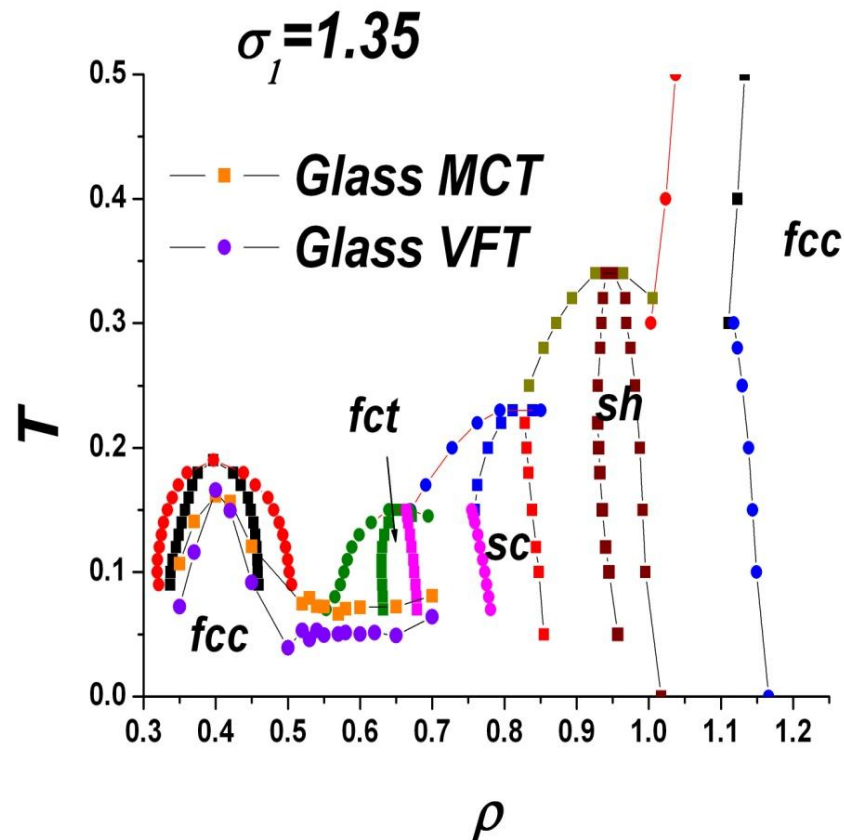
Glass transition – computer simulations

$\sigma = 1.35$



$$T_c = 0.079; \gamma = 2.29$$

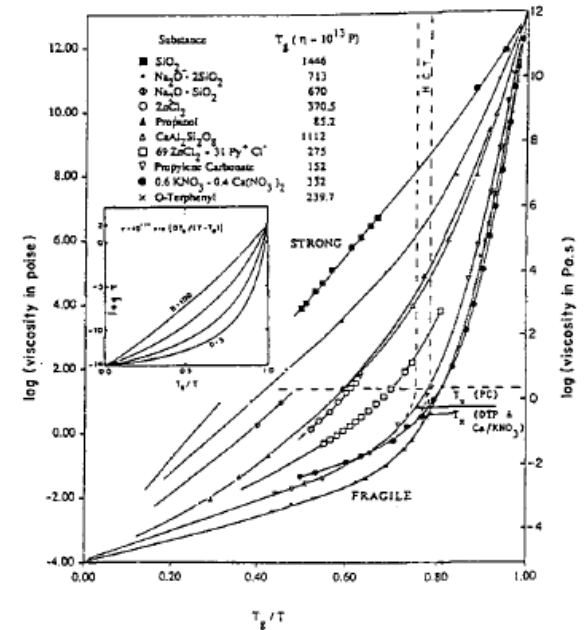
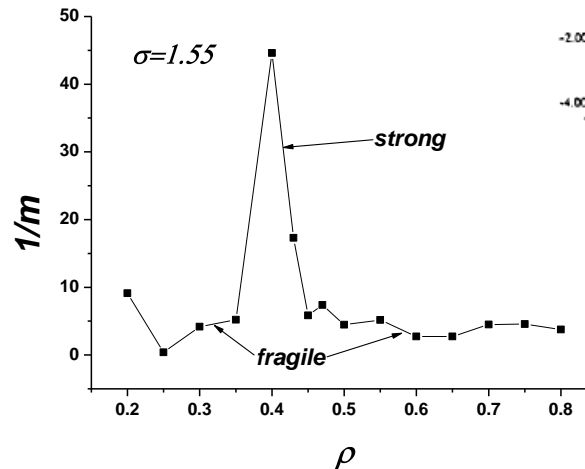
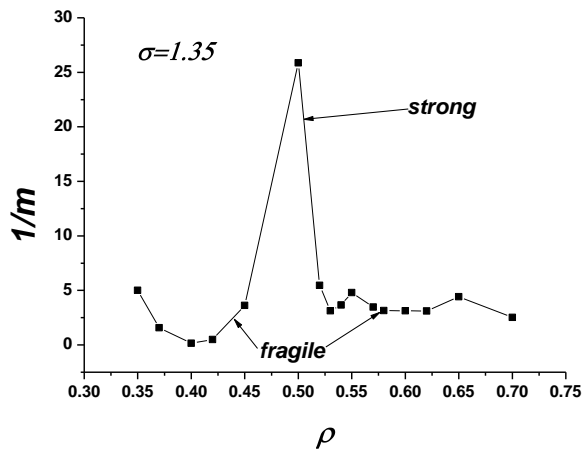
Glass transition – computer simulations



Repulsive step potential – strong-fragile transition

Fragility index m

$$m \propto \left. \frac{d(\log(D_0 / D))}{d(T_g / T)} \right|_{T_g}$$



$$\eta(T) = \eta_0 \exp \left(\frac{B}{T - T_0} \right)$$

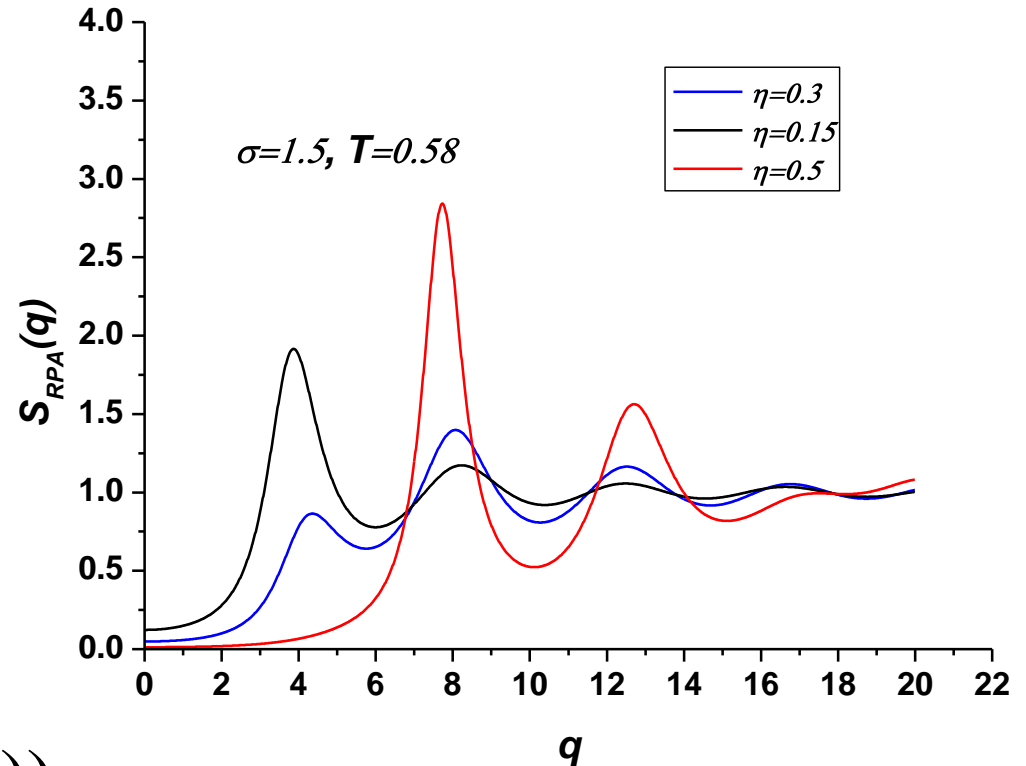
Glass transition in the repulsive step system (MCT)

Approximation for the direct correlation function

$$C_{RPA}(r) = \begin{cases} C_{HS}(r), r \leq \sigma \\ -\beta u, \sigma < r \leq \sigma_1 \\ 0, r > \sigma_1 \end{cases}$$

Structure factor

$$S_{RPA}(q) = 1/(1 - \rho C_{RPA}(q))$$



Glass transition in the repulsive step system (MCT)

Two-peak approximation - generalization of the minimal model
(U. Bengtzelius, W. Gotze, and A. Sjolander, J. Phys. C **17**, 5917 (1984)).

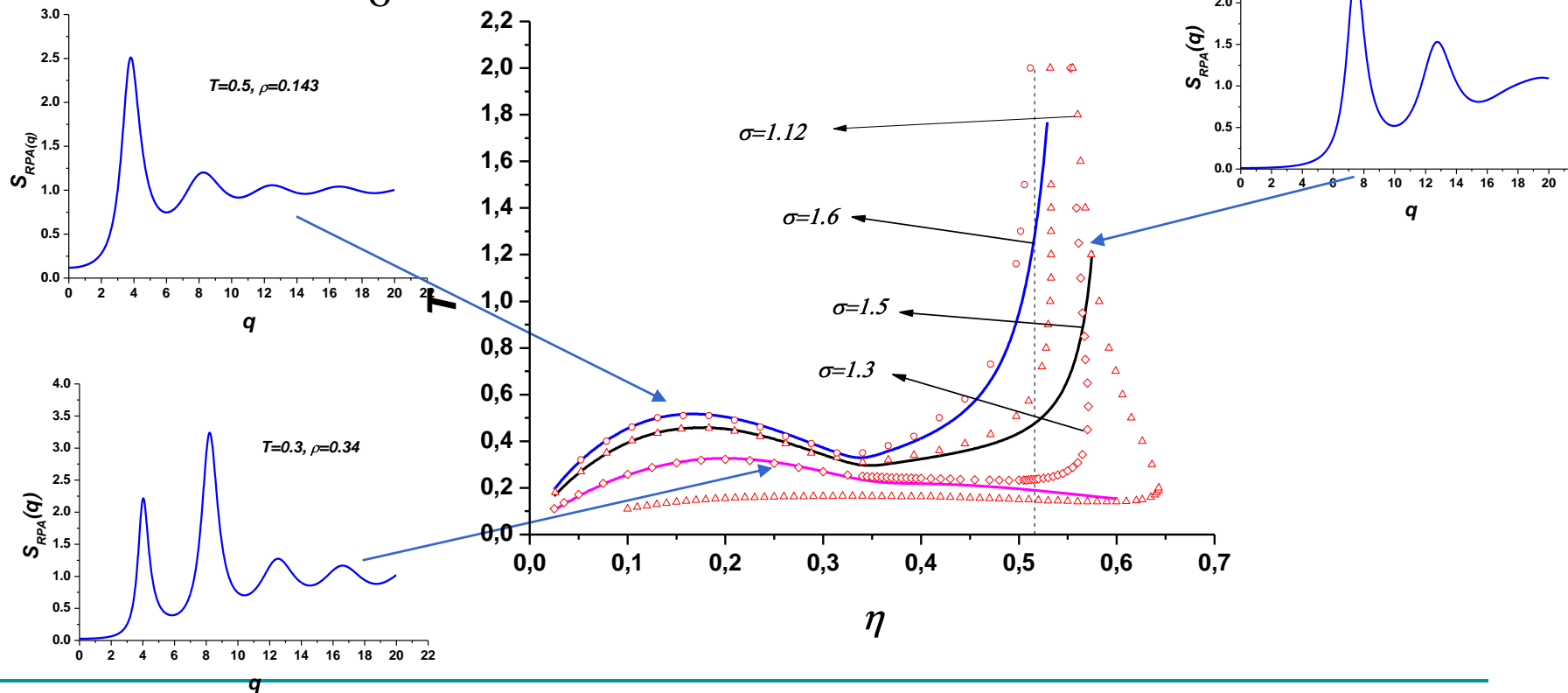
$$S_{RPA}(q) \approx 1 + A\delta(q - k_1) + B\delta(q - k_2)$$

$$\frac{f(k_1)}{1 - f(k_1)} = \frac{S(k_1)k_1}{8\pi^2\rho} \left(Af(k_1) + \frac{k_2}{k_1} Bf(k_2) \right)^2$$

$$\frac{f(k_2)}{1 - f(k_2)} = \frac{S(k_2)k_2^2}{8\pi^2k_1\rho} \left(Af(k_1) + \frac{k_2}{k_1} Bf(k_2) \right)^2$$

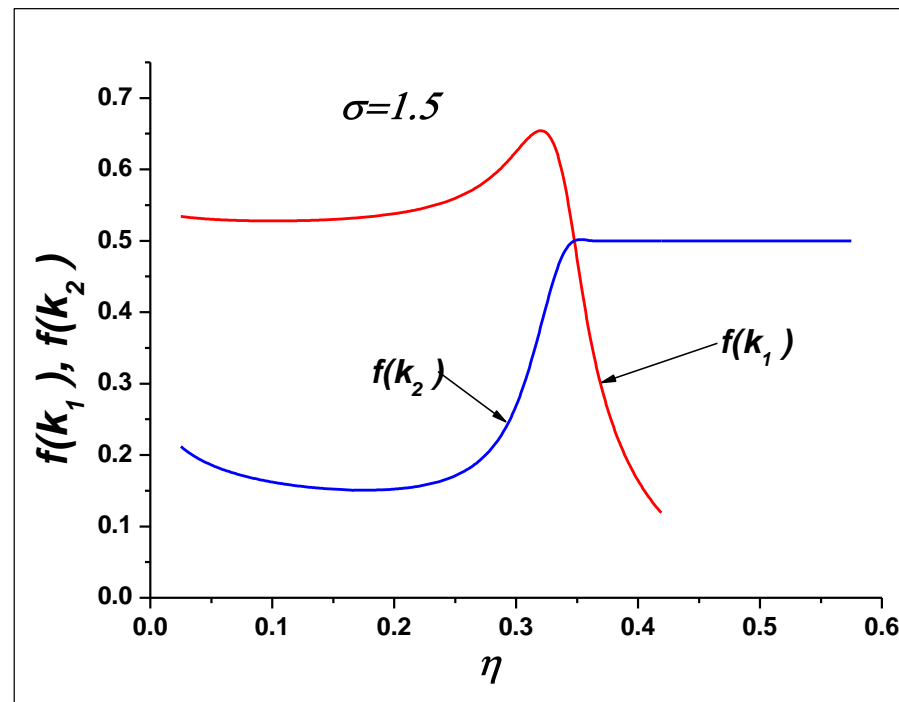
Glass transition in the repulsive step system (MCT)

MCT glass transition temperature as a function of packing fraction $\eta = \frac{\pi}{6} \rho d^3$



Glass transition in the repulsive step system (MCT)

MCT glass transition order parameters $f(k_1)$ and $f(k_2)$ as functions of packing fraction $\eta = \frac{\pi}{6} \rho d^3$



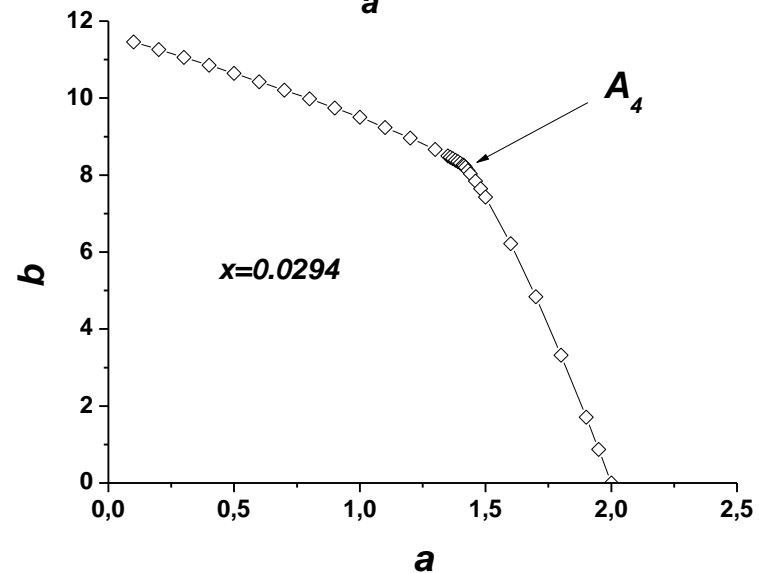
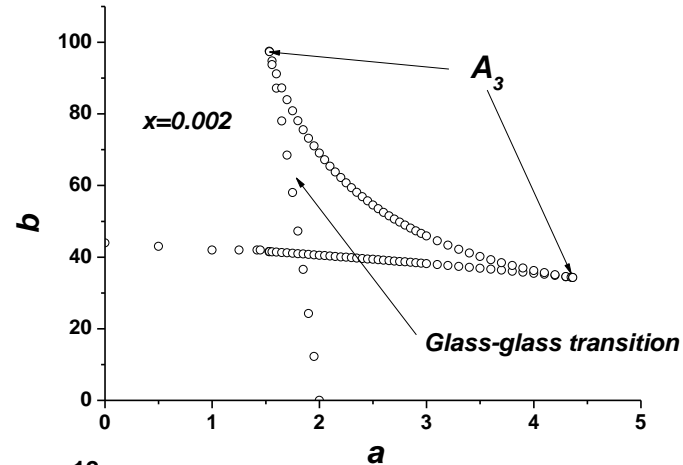
Higher-Order Singularities

Control parameters

$$x = \frac{S(k_2)}{S(k_1)} \frac{k_2^2}{k_1^2}$$

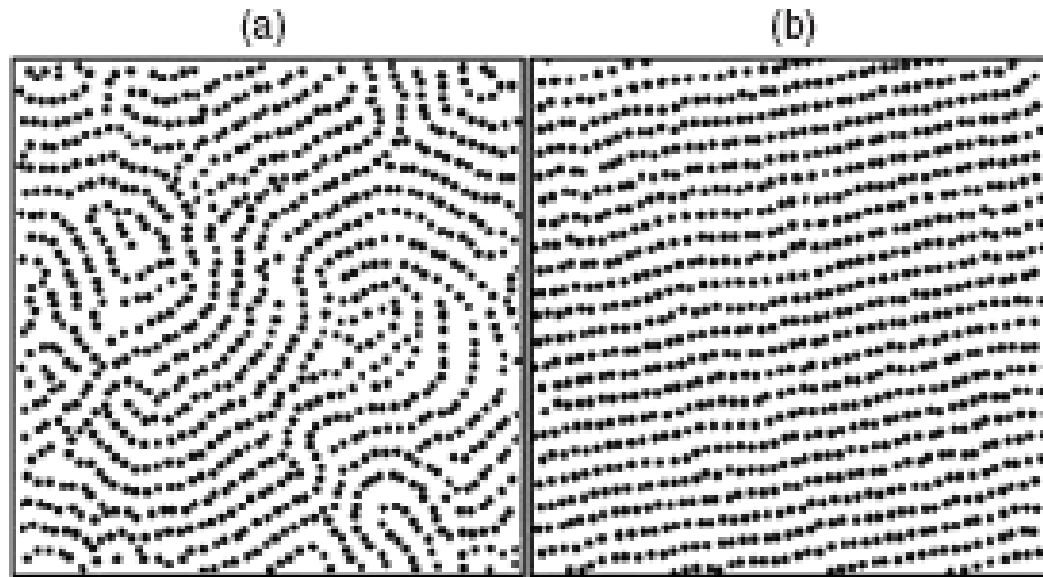
$$a = A \frac{S(k_1)k_1}{8\pi^2 \rho}$$

$$b = B \frac{S(k_1)k_2}{8\pi^2 \rho}$$



Потенциалы с отрицательной кривизной в двух измерениях

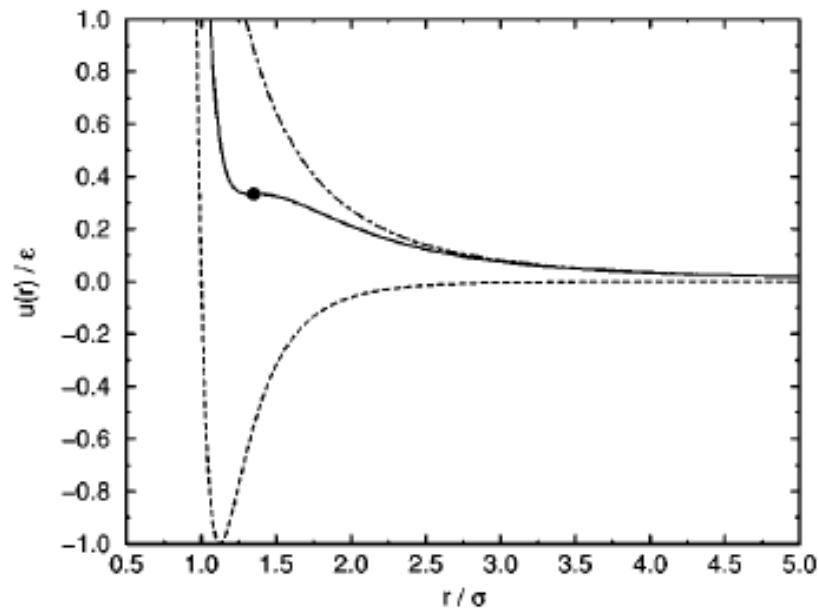
- Система коллапсирующих сфер в 2D – образование страйп-фазы ($\sigma=1.5$, $\rho = 0.28$; (a) $T = 0.18$; (b) $T = 0.17$) (G.Malescio and G.Pellicane, Nature Mater. 2 97 (2003); M. A. Glaser et al, EPL, 78 (2007) 46004).



Потенциалы с отрицательной кривизной

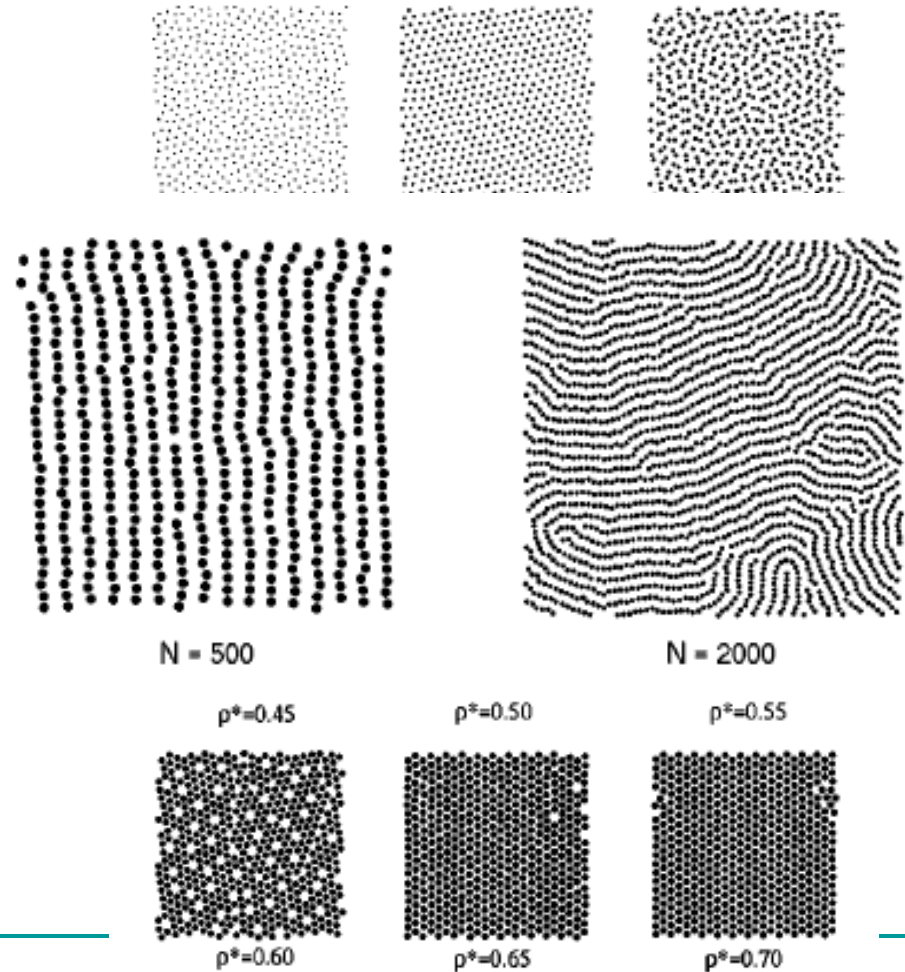
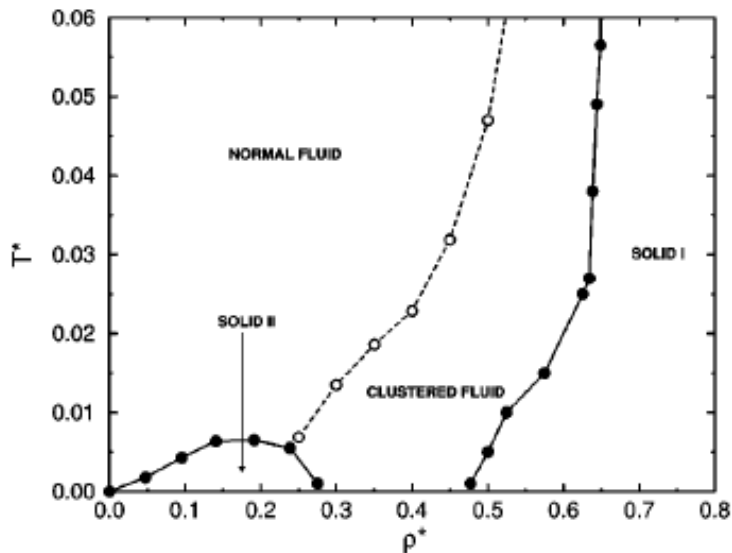
P.J. Camp, PHYSICAL REVIEW E **68**, 061506 (2003)

$$u(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] + \epsilon' \left(\frac{\sigma}{r} \right)^3$$



Потенциалы с отрицательной кривизной в двух измерениях

2D (P.J. Camp, PHYSICAL REVIEW E **68**, 061506 (2003))



Выводы

- Потенциалы с отрицательной кривизной в области отталкивания приводят к фазовым диаграммам, которые радикально отличаются от фазовых диаграмм типичных жидкостей типа аргона.
- Потенциалы с отрицательной кривизной могут служить базовой моделью для качественного описания поведения термодинамических и кинетических аномалий, наблюдаемых в реальных системах.
- Потенциалы с отрицательной кривизной в силу квазибинарности представляют собой однокомпонентную систему, в которой можно сравнительно легко наблюдать стеклование, при этом наблюдается возвратный переход жидкость-стекло, а также смена типа стеклообразующей жидкости.
- [1] Yu. D. Fomin, Daan Frenkel, N.V.Gribova, V.N.Ryzhov, S.M. Stishov, Journal of Chemical Physics 129, 064512 (2008)).
- [2] N.V. Gribova, Yu.D. Fomin, V.N. Ryzhov, Daan Frenkel, Phys. Rev. E 79, 051202 (2009).
- [3]. Yu.D. Fomin, N.V. Gribova, V.N. Ryzhov, Daan Frenkel, Phys. Rev. E 81, 061201 (2010).

*Thank you for your
attention*
