О возможности нахождения распределения температуры в стержневых конструкциях

Ю.В. Дворянчикова
аспирантка
Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

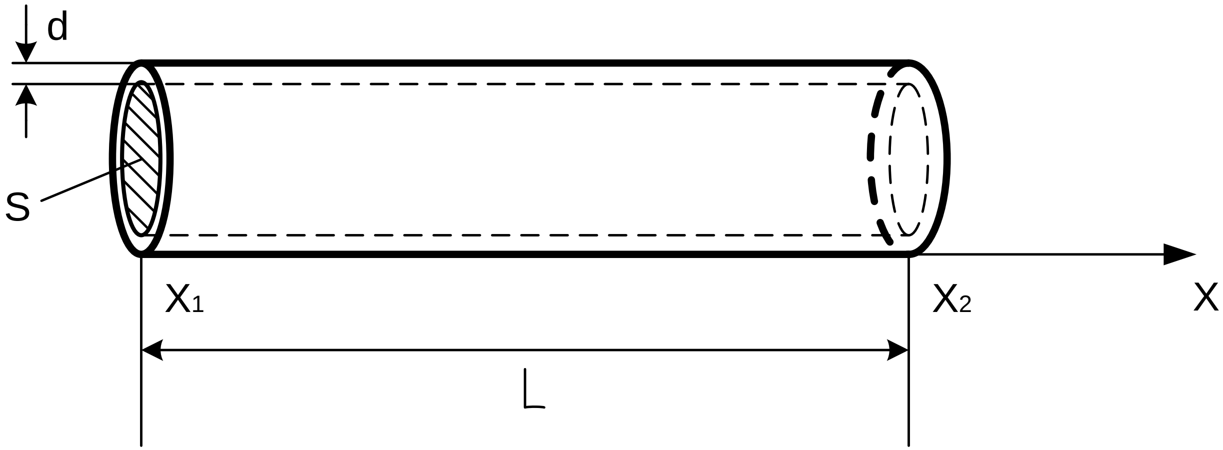
Введение

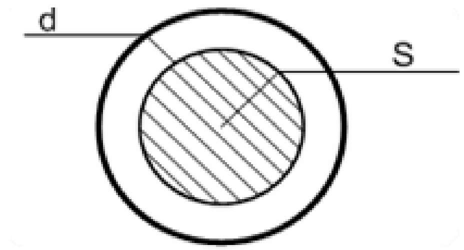
Задачи о распространении тепла в системах контактирующих стержней с внешней теплоотдачей особо остро возникают при эксплуатации систем охлаждения энергетических установок. На практике часто встречаются конструкции, отдельные детали которых состоят из элементов, которые можно достаточно точно считать при изучении теплопередачи стержнями. Это могут быть, в частности, компоненты микроэлектронной техники.

Результаты расчетов процессов теплопередачи в однородных стержнях хорошо известны. Менее изученные вопросы, связанные с расчетом распределения температуры в сложных стержневых конструкциях. В настоящей работе рассматриваются наиболее простой вариант такой конструкции, а именно – два контактирующих стержня из различных материалов.

В результате получено аналитическое решение, позволяющее проводить расчеты в рассматриваемых стержневых конструкциях. Обсуждаются возможности использования предлагаемого подхода для расчета стержневых конструкции более сложных конфигураций.

Рассмотрим вначале процесс теплопередачи для однородного стержня.
Пусть дан произвольный стержень длинной $l = x_2 - x_1$, где x_1 – координата начала стержня, а x_2 – конец (рис. 1). Площадь поперечного сечения стержня S, толщина оболочки d.





Процесс теплопередачи в стержне одномерен, то есть поле температур T вдоль стержня зависит только от x: $T = T(x)$.
Процесс стационарный и поэтому температура не зависит от времени.
Стационарное температурное поле в однородном прямолинейном стержне описывается уравнением вида:

$$\frac{d}{dx}\left(kS\frac{dT}{dx} \right) - H(T - T_{в}) = 0,$$

где

k – коэффициент теплопроводности стержня;
S – площадь поперечного сечения стержня.

$H = \frac{k_{обл}}{d}$ – коэффициент внешней теплоотдачи;

Тв – внешняя температура;
Будем считать, что внешняя температура всюду постоянна и равна 0, т.е. *Тв = 0*.
Величины *H, k, S* в общем случае зависят от координаты *x*, в нашем случае они являются постоянными. Тогда уравнение можно записать

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - m^2T(x) = 0,$$

где $m^2 = \frac{H}{kS}.$

Основная задача состоит в отыскании закона распределения температуры вдоль стержня *T(x)*, если заданы температуры на концах стержня, то есть граничные условия первого рода:

$$T|_{x1} = T_1\,, \quad T|_{x2} = T_2.$$

Решение уравнения имеет вид:

$$T(x) = T_1 \frac{\mathrm{sh}\, m(x - x_2)}{\mathrm{sh}\, m(x_1 - x_2)} + T_2 \frac{\mathrm{sh}\, m(x - x_1)}{\mathrm{sh}\, m(x_2 - x_1)}$$

Используя полученное решение уравнения можно построить графики распределения тепла в стержне. Общий вид распределения тепла по длине стержня при условии, что на концах его поддерживается одинаковая температура, будет выглядеть, как показано на рис.

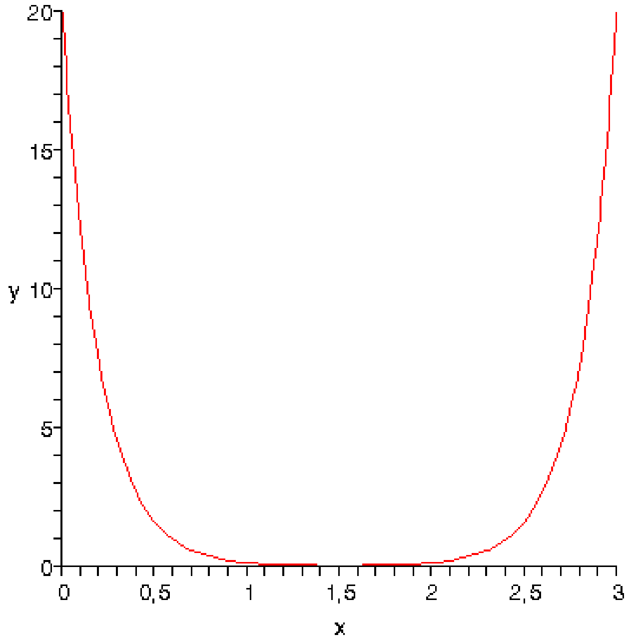


Рис. Распределение тепла в стержне конечной длины при одинаковой температуре на его концах

Рассмотрим контакт двух различных однородных стержней:

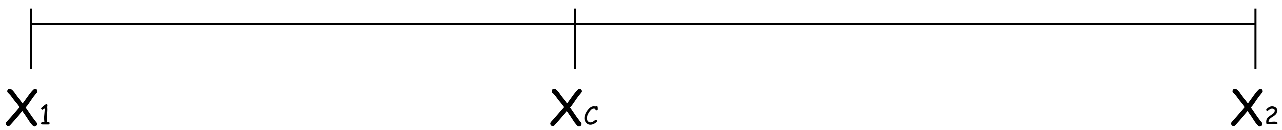


Рис. Схема контактирующих стержней.

Положим $x_1 < x_c < x_2$, где x_c – точка контакта стержней.
Для каждого стержня имеем:

$$\frac{d^2T^{(1)}}{dx^2} - m_1^2 T^{(1)} = 0 \qquad \frac{d^2T^{(2)}}{dx^2} - m_2^2 T^{(2)} = 0$$

Положим, что на краях стержня при x_1 и x_2 заданы внешние температуры:

$$T\Big|_{x_1} = T_1$$

$$T\Big|_{x_2} = T_2$$

Температуру точки контакта стержней обозначим через *Tc*. Запишем решение уравнения для первого стержня и решение уравнения для второго стержня:

$$T^{(1)}(x) = T_1 \frac{\operatorname{sh} m(x - x_c)}{\operatorname{sh} m(x_1 - x_c)} + T_c \frac{\operatorname{sh} m(x - x_1)}{\operatorname{sh} m(x_c - x_1)},$$

$$T^{(2)}(x) = T_c \frac{\operatorname{sh} m(x - x_2)}{\operatorname{sh} m(x_c - x_2)} + T_2 \frac{\operatorname{sh} m(x - x_c)}{\operatorname{sh} m(x_2 - x_c)}.$$

Запишем условия сопряжения для двух стержней:

$$T^{(1)}\Big|_{x_c} = T_c = T^{(2)}\Big|_{x_c}$$

$$-k_1 \frac{dT^{(1)}}{dx}\Big|_{x_c} = -k_2 \frac{dT^{(2)}}{dx}\Big|_{x_c}$$

Здесь k_1 и k_2 - коэффициенты теплопроводности первого и второго стержня. Выполнив условия сопряжения, мы найдем выражение для определения температуры T_c в точке контакта стержней.

Если есть источники тепла мощностью Q в контакте двух стержней, то с учетом условий сопряжений получим:

$$T_1 \frac{m}{\operatorname{sh}m(x_1 - x_c)} + T_c \frac{m \cdot \operatorname{ch}m(x_c - x_1)}{\operatorname{sh}m(x_c - x_1)} - T_c \frac{m \cdot \operatorname{ch}m(x_c - x_2)}{\operatorname{sh}m(x_c - x_2)} - T_2 \frac{m}{\operatorname{sh}m(x_2 - x_c)} = Q$$

Из данного выражения находим T_c:

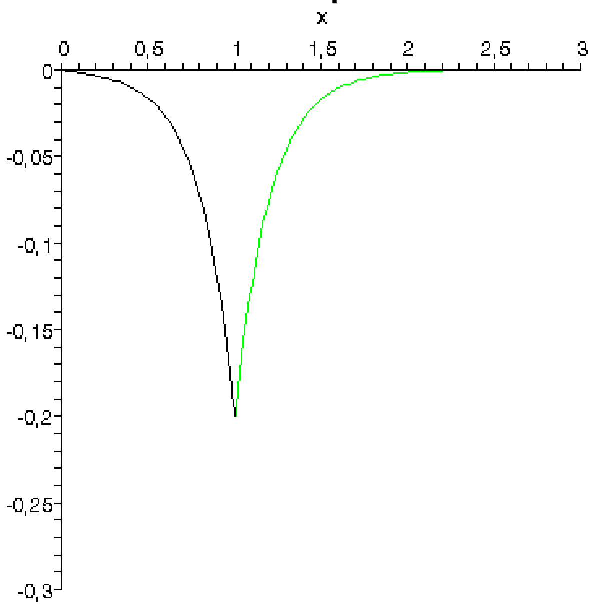
$$T_c = \frac{Q \cdot \operatorname{sh}m(x_1 - x_c) \cdot \operatorname{sh}m(x_2 - x_c)}{m \cdot \operatorname{ch}m(x_2 - x_1)} - \frac{T_1 \cdot \operatorname{sh}m(x_2 - x_c)}{\operatorname{ch}m(x_2 - x_1)} + \frac{T_2 \cdot \operatorname{sh}m(x_1 - x_c)}{\operatorname{ch}m(x_2 - x_1)}$$

Подставляя выражение для температуры в точке контакта стержней, в уравнения, получим закон распределения тепла для системы двух контактирующих стержней.

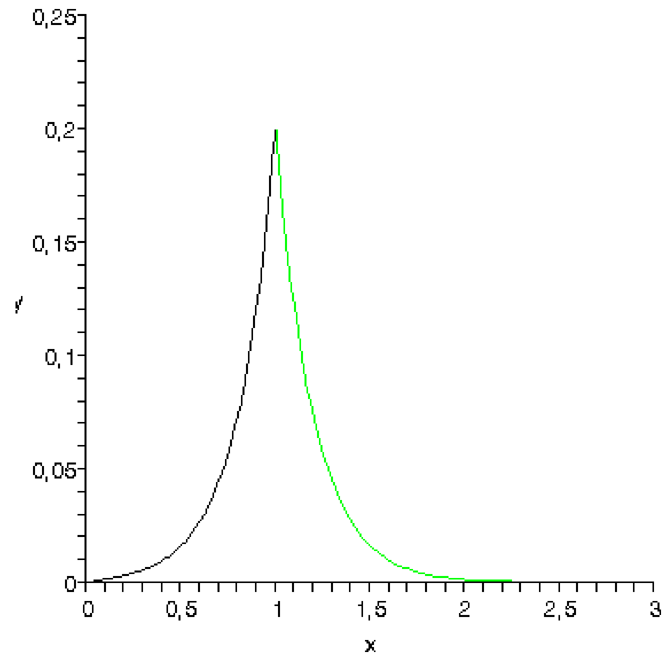
$$T^{(1)} = T_1 \frac{\mathrm{sh}m(x - x_c)}{\mathrm{sh}m(x_1 - x_c)} + \left(\frac{Q \cdot \mathrm{sh}m(x_1 - x_c) \cdot \mathrm{sh}m(x_2 - x_c)}{m \cdot \mathrm{ch}m(x_2 - x_1)} - \frac{T_1 \cdot \mathrm{sh}m(x_2 - x_c)}{\mathrm{ch}m(x_2 - x_1)} + \frac{T_2 \cdot \mathrm{sh}m(x_1 - x_c)}{\mathrm{ch}m(x_2 - x_1)} \right) \cdot \frac{shm(x - x_1)}{shm(x_c - x_1)},$$

$$T^{(2)} = \left(\frac{Q \cdot \mathrm{sh}m(x_1 - x_c) \cdot \mathrm{sh}m(x_2 - x_c)}{m \cdot \mathrm{ch}m(x_2 - x_1)} - \frac{T_1 \cdot \mathrm{sh}m(x_2 - x_c)}{\mathrm{ch}m(x_2 - x_1)} + \frac{T_2 \cdot \mathrm{sh}m(x_1 - x_c)}{\mathrm{ch}m(x_2 - x_1)} \right) \cdot \frac{\mathrm{sh}m(x - x_2)}{\mathrm{sh}m(x_c - x_2)} + T_2 \frac{\mathrm{sh}m(x - x_c)}{\mathrm{sh}m(x_2 - x_c)}.$$

В качестве иллюстрации некоторых возможностей полученного решения ниже приведены результаты расчетов для модельной задачи, в которой точка контакта выбрана x_c=1, все остальные параметры выбраны произвольно, x_1 = 0, x_2 = 3, T_1=0, T_2=0. Общий вид распределения тепла в данной системе будет иметь вид, как показано на рис.

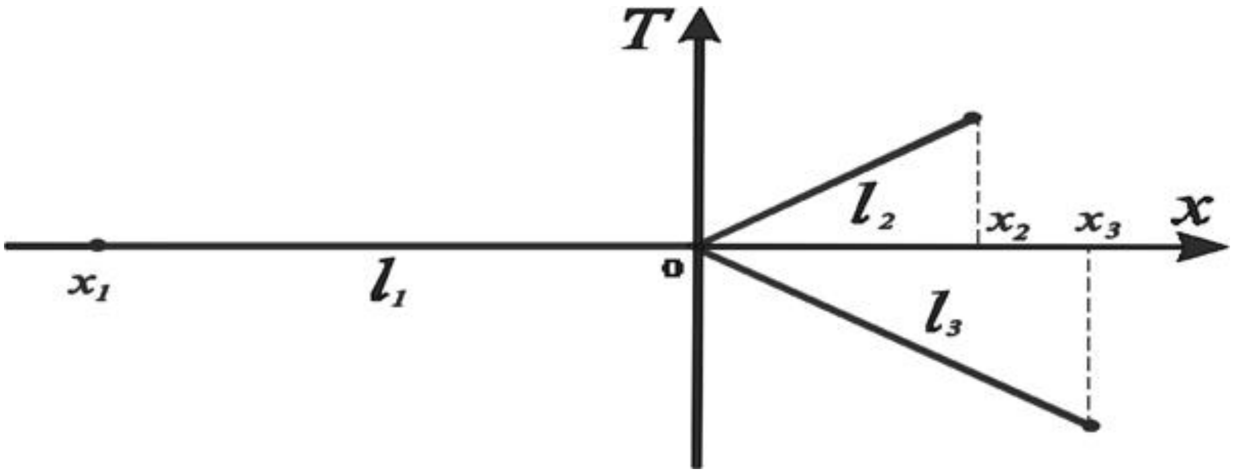


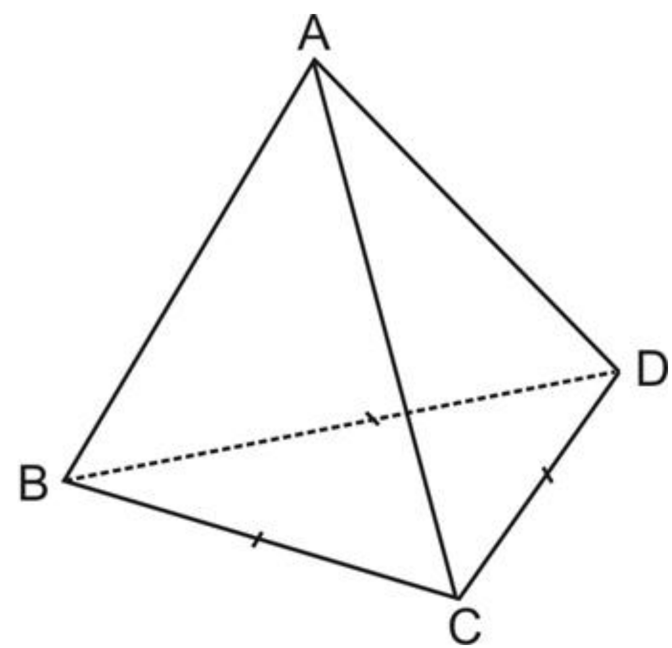
а)



б)

Рис. График распределение тепла в системе двух контактирующих стержней при различных коэффициентах теплопроводности материала стержней и материала оболочек для а) Q=-2; б) Q= 2.





Получены предварительные результаты расчетов распределения температуры в более сложных стержневых конструкциях

Выводы

- В результате работы получено аналитическое решение, позволяющее проводить расчеты в рассматриваемой стержневой конструкции.
- Показана перспективность использования предлагаемого подхода для расчетов распределения температуры в более сложных стержневых конструкциях

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзгеймер С.А., Гладышев Ю.А., Дворянчикова Ю.В., Сначев А.В., Хомутский В.А. «О расчете характеристик процесса выравнивания температуры в простейших пространственных стержневых системах» //.Научные труды КГПУ им. К.Э. Циолковского. Серия «Естественные науки», Калуга, 2006, С. 43-47;
2. Гинзгеймер С.А., Гладышев Ю.А. О процессе установления стационарного процесса теплопередачи в некоторых стержневых системах //Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: труды XV школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева, М: Изд-во МЭИ, 2005, с. 235-238;
3. Гинзгеймер С. А. Математическое моделирование процессов теплопередачи в системах контактирующих стержней / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Калуга, 2006.