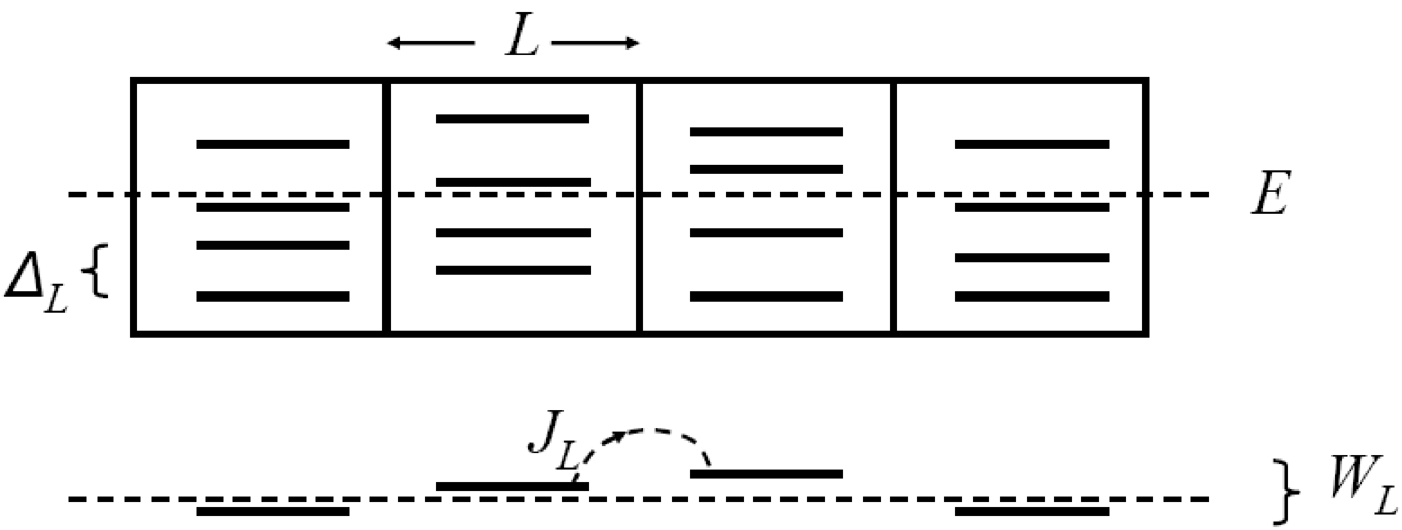
Проводимость конечных систем и скейлинг в теории локализации

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П.Л.Капицы РАН

Скейлинговая теория локализации

«Банда четырех»: E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishman, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).



Скейлинговый параметр

$$g_L = \frac{J_L}{W_L} = \frac{G_L}{e^2/\hbar}$$

где $G_L = \sigma_L L^{d-2}$ - полная проводимость (кондактанс) блока размера L

$J_L \sim \hbar/\tau_D$ $\quad$ $\tau_D = L^2/D_L$

$W_L \sim \Delta_L \sim 1/\nu_F L^d$

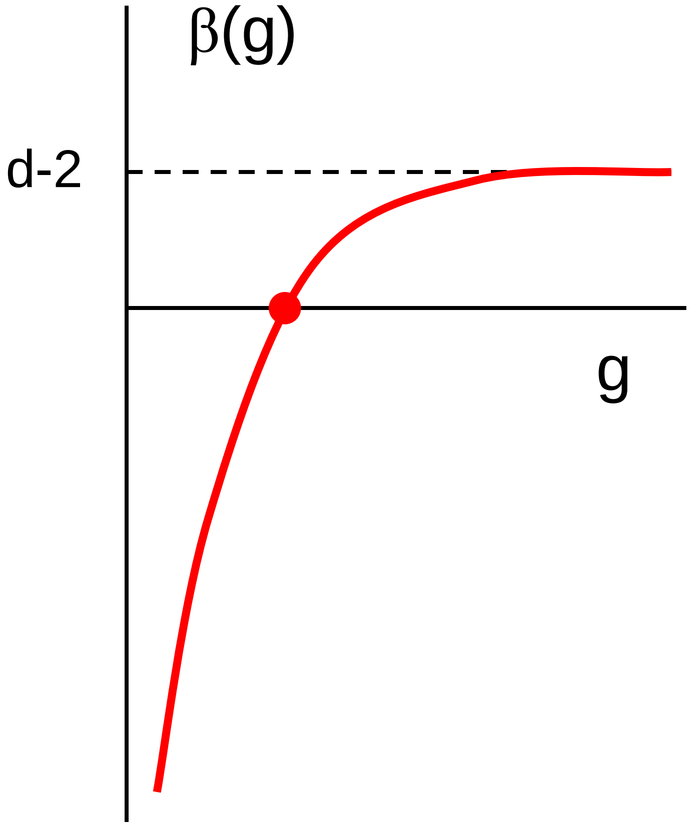
$\sigma_L = e^2 \nu_F D_L$

Поскольку блок размера nL может быть получен из n^d блоков размера L, то

$$g_{nL} = F(g_L, n)$$

что при $n \to 1$ может быть записано в дифференциальной форме:

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g)$$



Поскольку очевидно

$G_L = \sigma_\infty L^{d-2}$ (металл)

$G_L \sim \exp\{-const \cdot L\}$ (диэлектрик)

то

$$\beta(g) = \begin{cases} d-2\,, & g \gg 1 \\ \ln g\,, & g \ll 1 \end{cases}$$

Дискуссия 1980-х

P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).

P. W. Anderson, Phys. Rev. B **23**, 4828 (1981).

переоткрытие формулы Ландауэра

R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970).

оригинальный вывод

E. N. Economou, C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).

D. S. Fisher, P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).

D. C. Langreth, E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 2978 (1981).

вывод из теории линейного отклика

H. L. Engquist, P. W. Anderson, Phys. Rev. B **24**, 1151 (1981).

D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **47**, 972 (1981).

R. Landauer, Z. Phys. **68**, 217 (1987).

M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, Phys. Lett. A **96**, 365 (1983).

общие комментарии

M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).

M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).

M. Ya. Azbel, J. Phys. C **14**, L225 (1981).

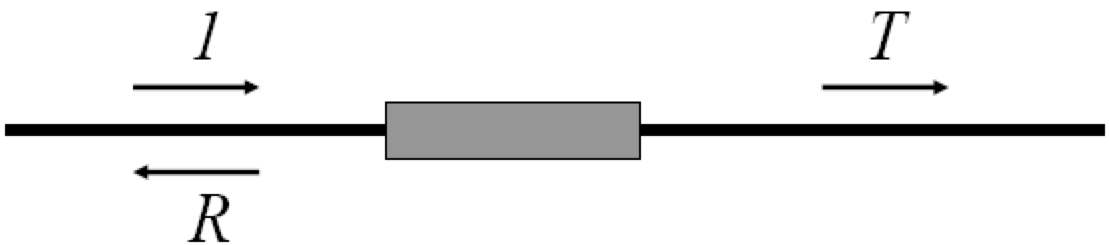
многоканальные обобщения

A. D. Stone, A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).

результирующий обзор

Простейшая формула Ландауэра

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\,\frac{T}{1-T}$$

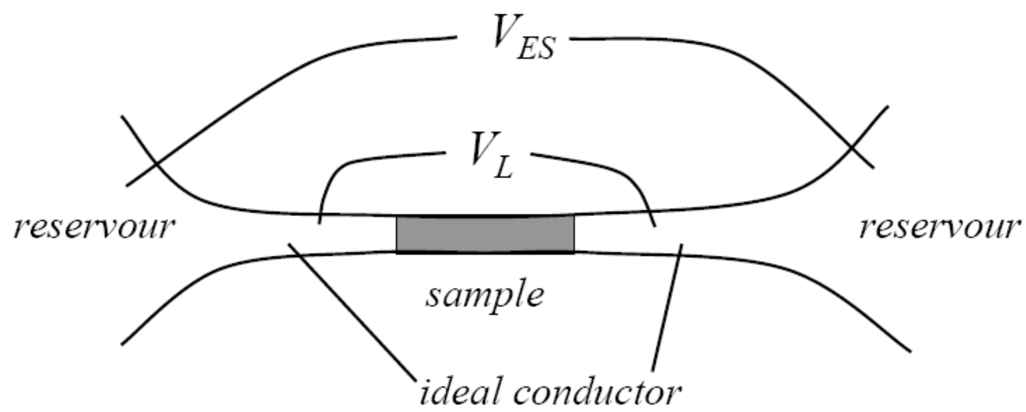


Электрический ток $\quad j \propto T$

Разность химпотенциалов

$$\Delta\mu \;\propto\; \Delta\rho \;\propto\; (1+R)-T = 2(1-T)$$

Итоги дискуссии



Одноканальный случай:

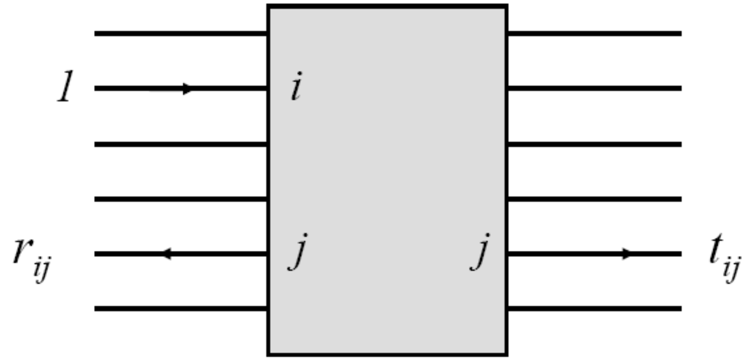
$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\,\frac{T}{1-T}$$

$$G_{ES} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\,T$$

$$\frac{1}{G_L} = \frac{1}{G_{ES}} - \frac{2\pi\hbar}{e^2}$$

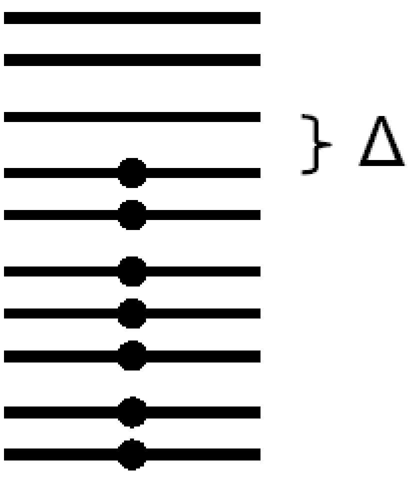
Многоканальный случай:

$$G_{ES} = \frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{ij} |\, t_{ij}\,|^2$$

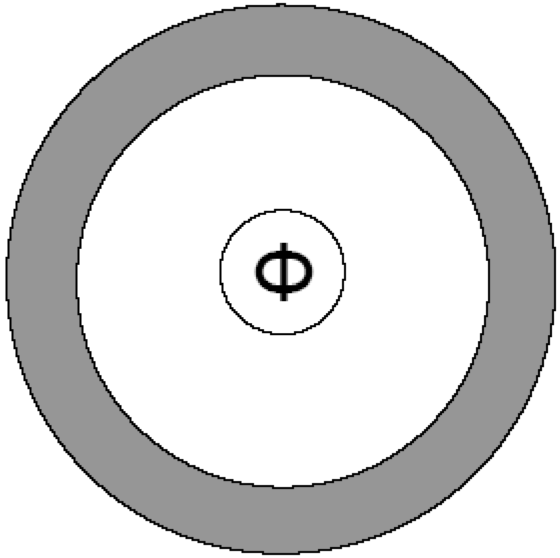


Что такое проводимость конечных систем?

$$\mathrm{Re}\ \ G_L(\omega) = 0, \qquad \omega \to 0$$

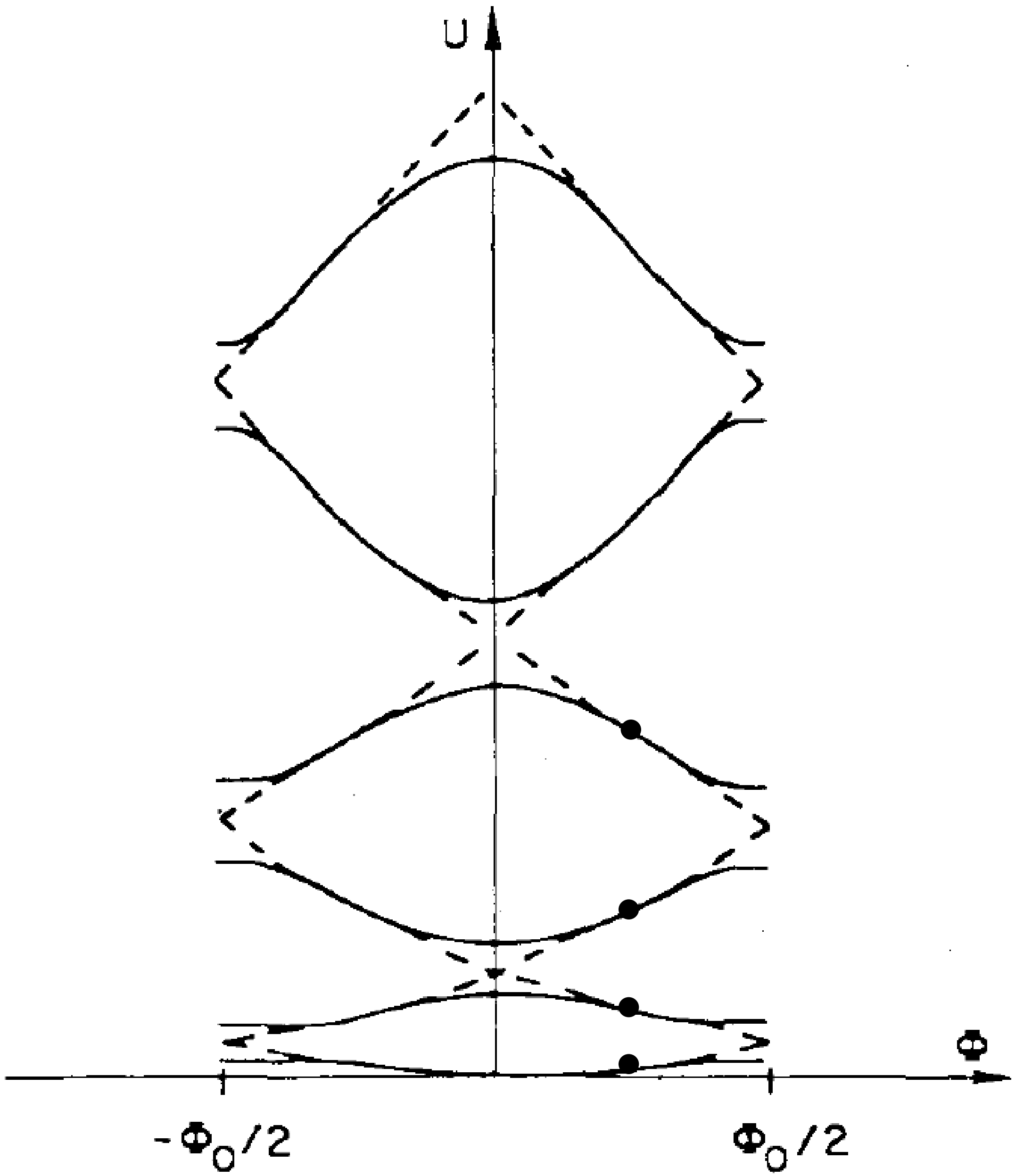


$$\mathrm{Re}\ \ R_L(\omega) = 0, \qquad \omega \to 0$$



$$\frac{\Phi}{\Phi_0} \neq 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1,\ \pm\frac{3}{2},\ \ldots$$

M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, Phys. Lett. A **96**, 365 (1983).


U
Φ
-Φ0/2
Φ0/2

Формулы Кубо: инструкция по эксплуатации

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\omega) = \frac{\pi e^2}{m^2 L^d} \sum_{s,s'} \frac{n(\varepsilon_s) - n(\varepsilon_{s'})}{\omega} |p_{ss'}|^2 \, \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'} + \omega)$$

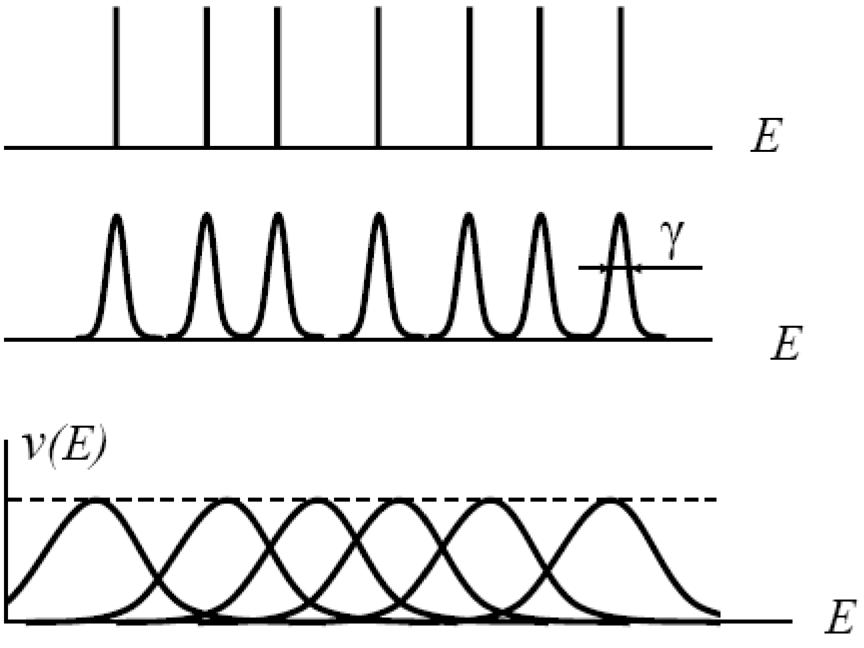
1. Вводится затухание γ

2. Берется термодина-
мический предел

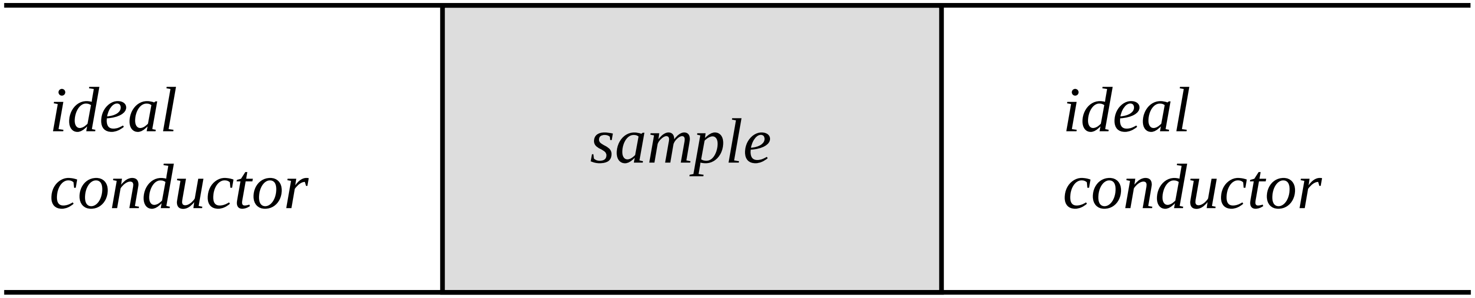
$$L \to \infty$$

3. Берется предел

$$\gamma \to 0$$



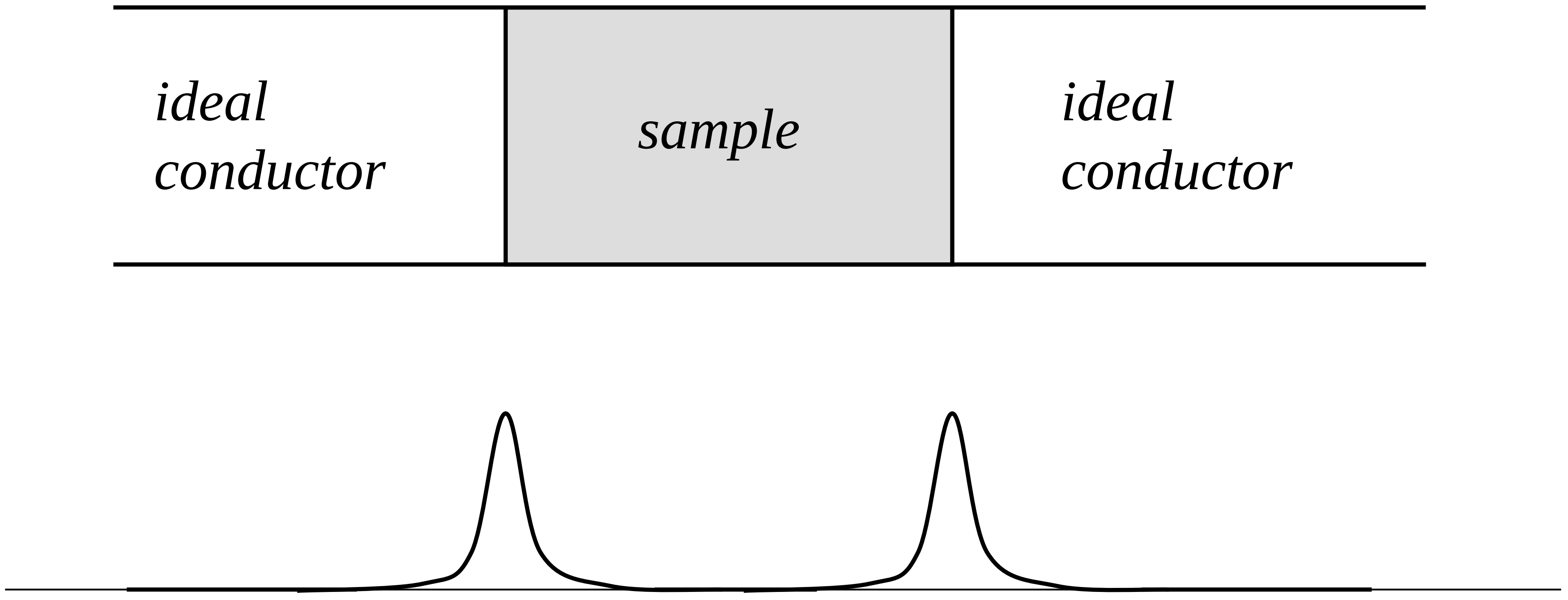
Решение проблемы в контексте формул Ландауэра



Термодинамический предел берется для идеального проводника.

Формулы Ландауэра относятся к составной системе «образец+подводящие провода».

Решение проблемы в контексте формул Ландауэра



При наличии барьера на границе формулы Ландауэра не отражают свойства образца.

Влияние открытости системы

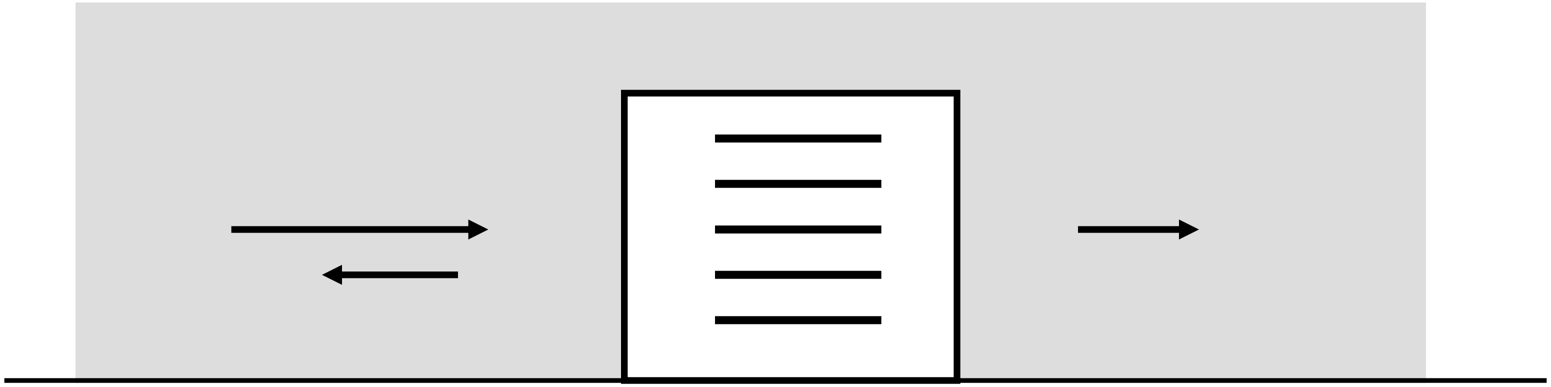
Keywords: модель оболочек

S. Iida, H. A. Weidenmüller, M. R. Zirnbauer, Ann. Phys. (N.Y.) **200**, 219 (1990).

A. Atland, Z. Phys. B **82**, 105 (1991).

M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. **69**, 1584 (1992).

P. W. Brouwer, K. Frahm, Phys. Rev. B **53**, 1490 (1996).



В настоящий момент остаются непроясненными следующие вопросы:

(а) об исключении контактного сопротивления в многоканальном случае;
(б) о связи формул Ландауэра с внутренними свойствами системы;
(в) о связи проводимости конечной системы с коэффициентом диффузии $D(\omega,q)$.

Ответ на эти вопросы дается ниже в рамках двух подходов:

(1) Самосогласованной теории локализации Вольхардта – Вольфле;
(2) Квантовомеханического анализа, основанного на модели оболочек.

Оба подхода приводят к одинаковому определению проводимости конечных систем.

Общая схема теории

Конечная система является квази-нульмерной и ее состояния формально локализованы

$$D(\omega, 0) = (-i\omega)\xi_{0D}^2$$

причем для корреляционного радиуса справедиво скейлинговое соотношение

$$\frac{\xi_{0D}}{L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

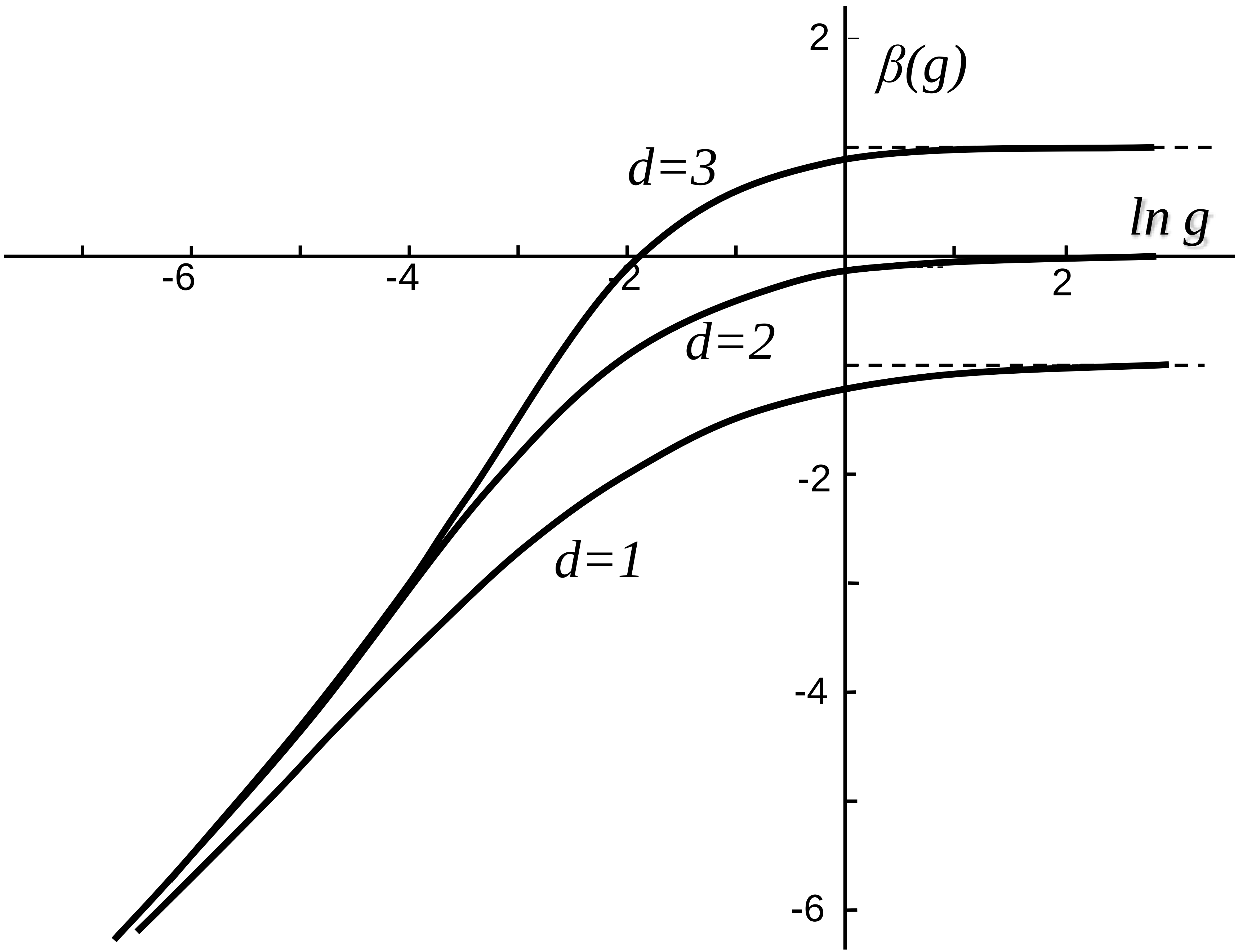
В открытой системе появляется конечная проводимость

$$g_L = F_1\left(\frac{\xi_{0D}}{L}\right)$$

Получить g как функцию L/ξ можно также из уравнения Гелл-Манна – Лоу

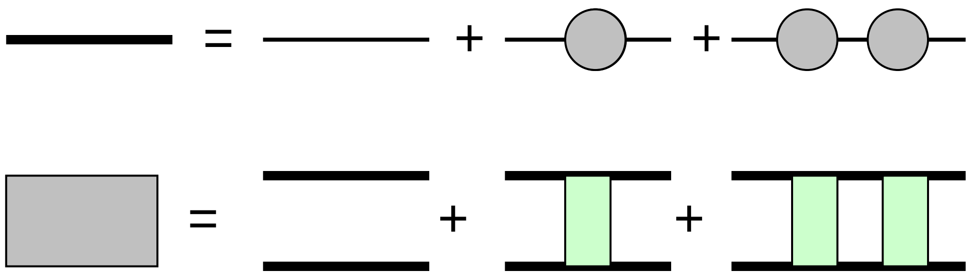
$$\frac{d \ln g}{d \ln(L/\xi)} = \beta(g)$$

а знание F и F_1 эквивалентно знанию $\beta(g)$.


2
β(g)
d=3
ln g
-6
-4
-2
2
d=2
d=1
-2
-4
-6

Теория Вольхардта-Вольфле

Основана на существовании диффузионного полюса в неприводимой четыреххвостке



$$U_{\mathbf{kk'}}(\mathrm{q}) = U^{reg}_{\mathbf{kk'}}(\mathrm{q}) + \frac{F(\mathrm{k},\mathrm{k}',\mathrm{q})}{-i\omega + D(\omega,\mathrm{k}+\mathrm{k}')(\mathrm{k}+\mathrm{k}')^2}$$

играющей роль вероятности перехода $W_{\mathrm{kk'}}$ в квантовом кинетическом уравнении.

Аппроксимация типа τ - приближения $D \sim \langle U \rangle^{-1}$ дает уравнение самосогласования

$$D \sim \left[U_0 + F_0 \int \frac{d^d q}{-i\omega + D(\omega,q)q^2} \right]^{-1}$$

Уравнение самосогласования

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D(\omega)}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int_0^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-i\omega/D(\omega)] + q^2}$$

Базовый интеграл

$$I(m) = \int_0^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2}$$

конечен при m=0 только для d>2.

Металлическая фаза: D=const при $\omega \to 0$

$$D = D_{\min}\left(\frac{E^2}{W^2} - I(0)\Lambda^{2-d}\right) = D_{\min}\tau$$

т.е. s=1.

Уравнение самосогласования

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D(\omega)}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int_0^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-i\omega/D(\omega)] + q^2}$$

Диэлектрическая фаза: D = - iω ξ^2 при ω→ 0 (m=ξ^{-1})

$$I(m) = \int_{|q|<\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2+q^2} = \begin{cases} c_d/m^{2-d}\,, & d<2 \\ c_2 \ln(\Lambda/m)\,, & d=2 \\ I(0) - c_d m^{d-2}\,, & 2<d<4 \\ I(0) - c_4 m^2 \ln(\Lambda/m)\,, & d=4 \\ I(0) - c_d m^2 \Lambda^{d-4}\,, & d>4 \end{cases}$$

$$\xi \sim a\frac{E^2}{W^2}\,, \qquad d=1$$

$$\xi \sim a \exp\left(2\pi \frac{E^2}{W^2}\right)\,, \qquad d=2$$

$$\xi \sim a|\tau|^{-\nu}\,, \qquad d>2$$

$$\nu = \begin{cases} 1/(d-2)\,, & 2<d<4 \\ 1/2\,, & d>4 \end{cases}$$

И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).

О ранней попытке скейлинга (Vollhardt and Woelfle, 1982)

1. Модификация соотношения Эйнштейна

$$\sigma_L \sim e^2 \nu_F D_L \exp(-L/\xi)$$

Для получения этого результата рассматривается изменение электронной плотности $\rho(x)$, индуцированное скалярным потенциалом $\varphi(x)$,

$$\rho(x) = \int_{-L/2}^{L/2} \alpha(x-x')\varphi(x')dx' \,, \tag{18}$$

где $\alpha(x-x')$ — поляризуемость

$$\alpha(x-x') = -e^2\nu_F \left[\delta(x-x') - (2\xi)^{-1}\exp\{-|x-x'|/\xi\}\right] . \tag{19}$$

Для замкнутой системы поток электронов через границы отсутствует, поэтому диффузионный ток $j_{diff}(x) = -D_L d\rho(x)/dx$ на краях системы $x = \pm L/2$ равен электрическому току $j_e(x)$ с обратным знаком; это определяет σ_L. Производя такие вычисления для

$$\varphi(x) = \varphi_0 - Ex \,, \tag{20}$$

имеем

$$\rho(x) = e^2\nu_F \left[E(L/2+\xi)e^{-L/2\xi}\sinh(x/\xi) - \varphi_0 e^{-L/2\xi}\cosh(x/\xi)\right] , \tag{21}$$

так что

$$j_e(\pm L/2) = e^2\nu_F D_L \left[\frac{\mp\varphi_0 + E(L/2+\xi)}{2\xi} + \frac{\pm\varphi_0 + E(L/2+\xi)}{2\xi} e^{-L/\xi}\right] \tag{22}$$

При выборе $\varphi_0 = \pm E\,(L/2+\xi)$ имеем

$$j_e(\pm L/2) = e^2\nu_F D_L\,(\,1 + L/2\xi\,)\,e^{-L/\xi}\cdot E \tag{23}$$

2. Модификация уравнения самосогласования

Для конечной системы в уравнении самосогласования вводится обрезание на нижнем пределе

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D_L}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int\limits_{\sim 1/L}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2}$$

Вычитая такое же уравнение с L=∞, имеем

$$D_L = D_\infty + D_{min} \Lambda^{2-d} \int\limits_{0}^{\sim 1/L} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2}, \qquad m = \xi^{-1}$$

что дает сингулярность в критической точке.

Правильное уравнение имеет вид

$$D_L = D_{min} \Lambda^{2-d} \cdot \frac{1}{L^d} \sum_{\mathrm{q}} \left. \frac{e^{i\mathrm{q}\cdot\mathrm{x}}}{m^2 + q^2} \right|_{|\mathrm{x}| \sim L}, \qquad m = (\xi_{0D})^{-1}$$

и обеспечивает экспоненту в локализованной фазе.

Корреляционный радиус квази-нульмерной системы

Для описания квази-нульмерных систем базовый интеграл достаточно представить в виде

$$I(m) = \frac{1}{L^d} \sum_{|\mathbf{q}|<\Lambda} \frac{1}{m^2 + q^2}, \qquad m^{-1} = \xi_{0D}$$

Член с $\mathbf{q} = 0$ расходится при $m \to 0$ и система всегда оказывается в локализованной фазе.

Разбиение интеграла

$$I(m) = \frac{1}{L^d} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{L^d} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ |\mathbf{q}|<\Lambda}} \left(\frac{1}{m^2 + q^2} - \frac{1}{q^2} \right) + \frac{1}{L^d} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ |\mathbf{q}|<\Lambda}} \frac{1}{q^2} \equiv$$

$$\equiv I_1(m) + I_2(m) + I_3(0)$$

Преобразование интегралов:

$$I_1(m) = \frac{1}{L^{d-2}} \frac{1}{(mL)^2}$$

$$I_2(m) = \frac{1}{L^{d-2}} H_0(mL) + O\left(m^2 \Lambda^{d-4}\right)$$

$$H_0(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathrm{s}\neq 0} \left(\frac{1}{(z/2\pi)^2 + |\mathrm{s}|^2} - \frac{1}{|\mathrm{s}|^2} \right)$$

$$I_3(0) = \Lambda^{d-2} \left\{ b_0 + b_1 \left(\frac{a}{L}\right)^{d-2} + b_2 \left(\frac{a}{L}\right) + b_3 \left(\frac{a}{L}\right)^2 + \ldots \right\}$$

что надо подставить в уравнение самосогласования

$$\Lambda^{d-2} \frac{E^2}{W^2} = I(m)$$

Уравнение самосогласования

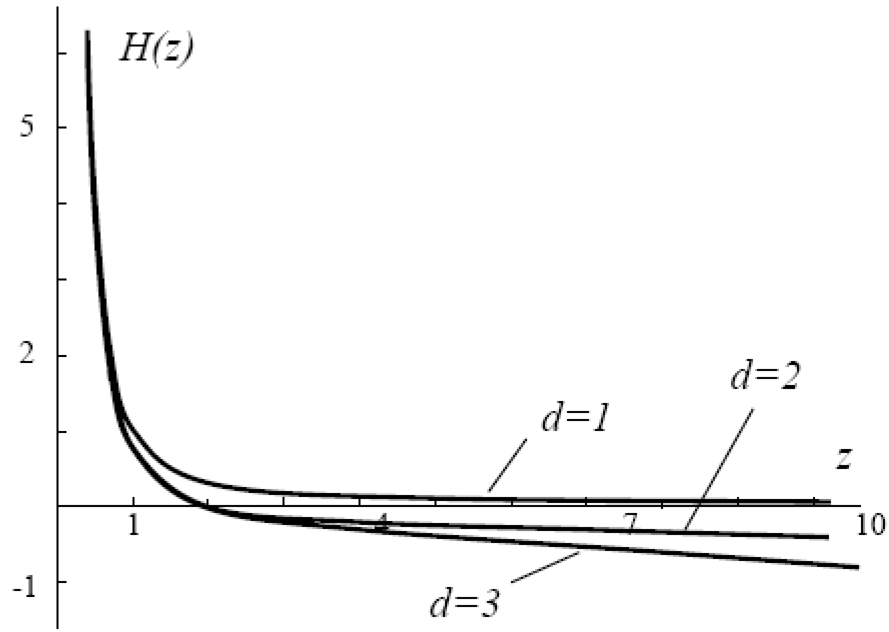
$$\left(\frac{L}{a}\right)^{d-2}\left[\tau + O(m^2a^2) + O\left(\frac{a}{L}\right)\right] = b_1 + H_0(mL) + \frac{1}{(mL)^2}$$

в пределе a→0 дает скейлинговые соотношения

$$\pm c_d\left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right), \qquad d > 2$$

$$\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\xi}{L}\right) = H\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right), \qquad d = 2$$

$$c_d\left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right), \qquad d < 2$$

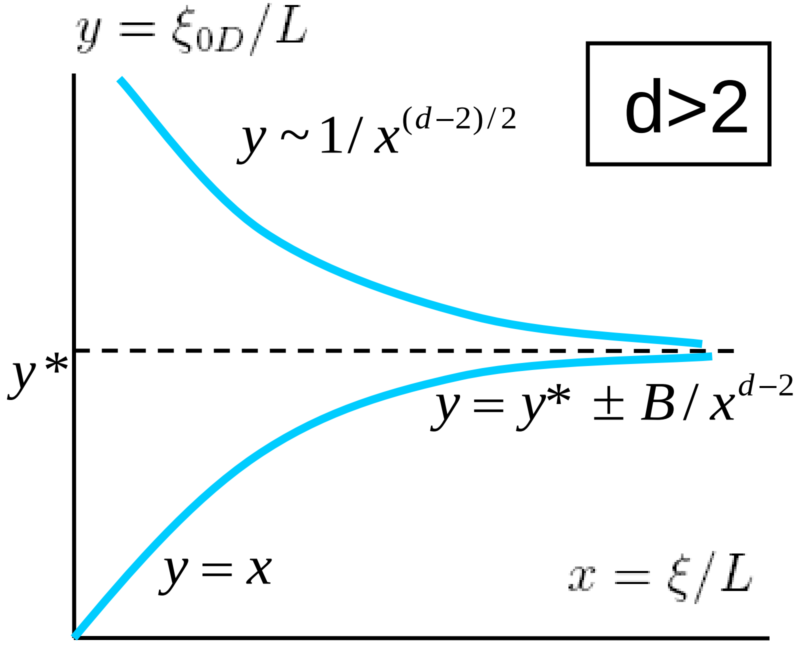


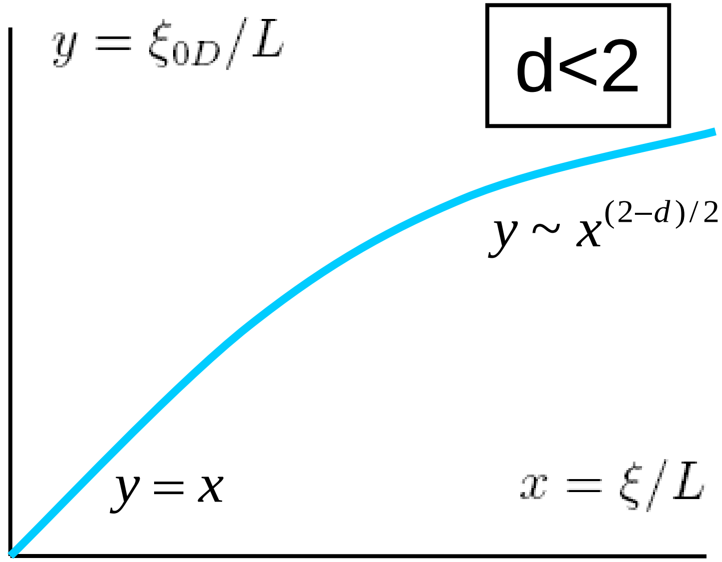
$$H(z) = b_1 + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\mathrm{s}\neq 0}\left(\frac{1}{|\mathrm{s}|^2 + (z/2\pi)^2} - \frac{1}{|\mathrm{s}|^2}\right) + \frac{1}{z^2}$$

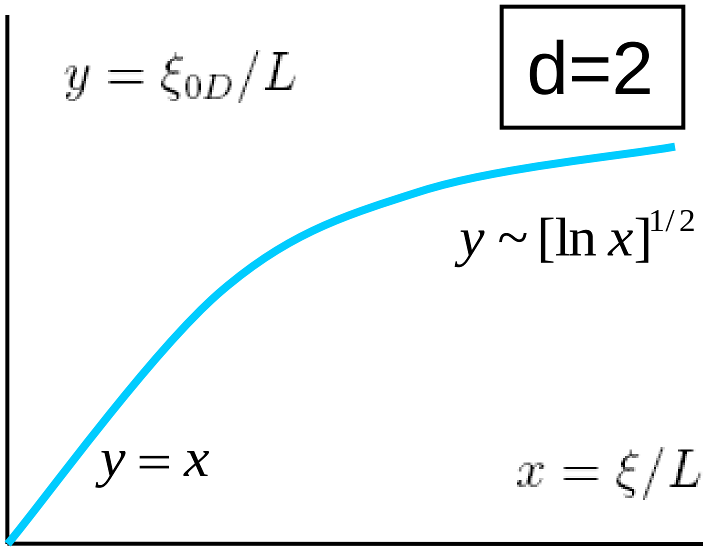
Вводя переменные

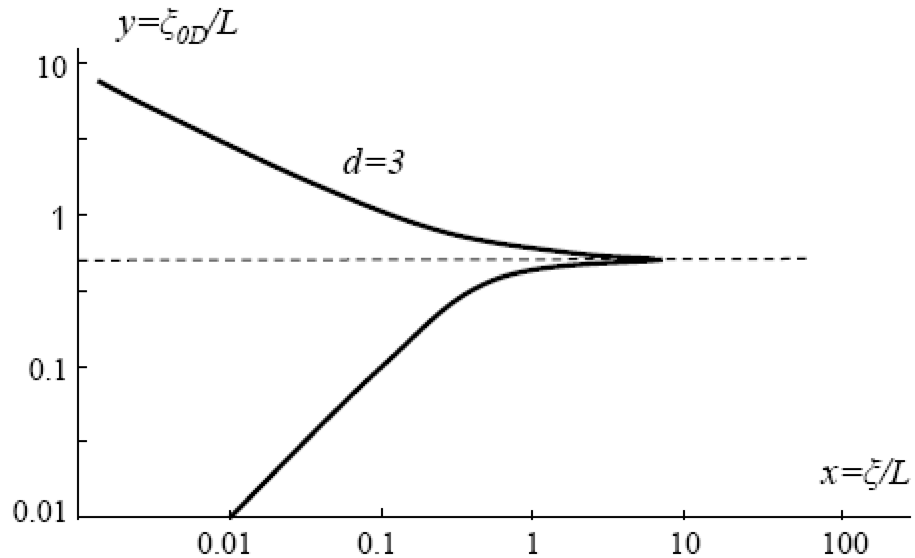
$$y = \xi_{0D}/L\,, \qquad x = \xi/L\,,$$

имеем для зависимости $y(x)$

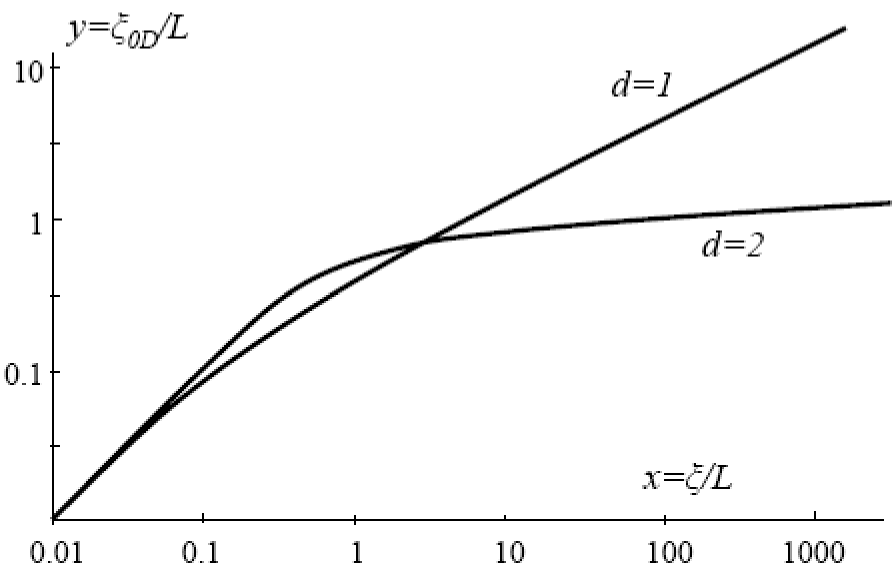








y=ξ0D/L
10
1
0.1
0.01
d=3
x=ξ/L
0.01
0.1
1
10
100



y=ξ0D/L
10
1
0.1
d=1
d=2
x=ξ/L
0.01
0.1
1
10
100
1000

Переход к открытым системам

Различие открытых и закрытых систем

$$\frac{\partial f}{\partial t} - D\,\nabla^2 f = 0$$

В конечной системе оператор Лапласа имеет нетривиальный спектр

$$-\nabla^2 e_s(x) = \lambda_s e_s(x)$$

Закрытые системы:

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad e_0(x) = const$$

Открытые системы:

$$\lambda_0 > 0\,, \qquad e_0(x) \neq const$$

Переход к открытым системам

Эволюция начального распределения $f_0(x)$:

$$f(x,t) = \sum_s A_s e^{-D\lambda_s t} e_s(x)\,, \qquad A_s = (f_0, e_s)$$

Предельное распределение в закрытой системе

$$f(x,t)|_{t\to\infty} = const = \langle f_0 \rangle$$

т.е. число частиц сохраняется.

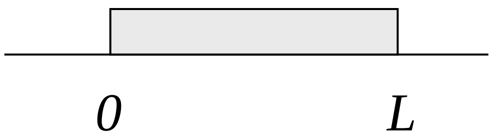
В открытой системе

$$f(x,t)|_{t\to\infty} = A_0\, e_0(x)\, e^{-D\lambda_0 t}$$

частицы уходят через границы.

Переход к открытым системам

Примеры:



Для блоховских граничных условий

$$f(L) = f(0)e^{i\varphi}$$

система закрыта при $\varphi=0$;
открыта при $\varphi\neq 0$;
предельно открыта при $\varphi=\pi$

Для реалистических граничных условий

$$f'_x(0) = \kappa f(0)\,, \qquad f'_x(L) = -\kappa f(L)$$

система закрыта при $\kappa=0$;
открыта при $\kappa\neq 0$;
предельно открыта при $\kappa=\infty$

Затухание состояний и конечность коэффициента диффузии

Коррелятор плотности

$$\mathcal{K}_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle G^R_{E+\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') G^A_E(\mathbf{r}',\mathbf{r})\rangle$$

выражается через спектральную плотность ρ

$$\mathcal{K}_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{1}{E+\omega-\epsilon+i0} \, \frac{1}{E-\omega'-\epsilon-i0} \, \rho_{\epsilon,\epsilon+\omega'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

связанную с поляризуемостью α

$$\rho_{\epsilon,\epsilon+\omega}(q) = -\frac{\mathrm{Im}\,\alpha_\epsilon(\omega,q)}{\pi e^2 \omega} \quad , \qquad \alpha(\omega,q) = -e^2\nu_F \, \frac{D(\omega,q)q^2}{-i\omega + D(\omega,q)q^2}$$

откуда

$$\boxed{\mathcal{K}_\omega(q) = \frac{2\pi\nu_F}{-i\omega + D(\omega,q)q^2}}$$

Замена

$$\pm i0 \quad \to \quad \pm i\gamma$$

в определениях функций Грина

$$G^{R,A}(x,x') = \sum_s \frac{\psi_s(x)\psi_s^*(x')}{E-\varepsilon_s \pm i0}$$

дает замену

$$-i\omega \quad \to \quad -i\omega + 2\gamma$$

в корреляторе плотности. В локализованной фазе остается инвариантной комбинация

$$\frac{-i\omega}{D(\omega,q)} = \frac{-i\omega}{(-i\omega)\xi^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{-i\omega+2\gamma}{(-i\omega+2\gamma)\xi^2}$$

При $\omega=0$ возникает конечный коэффициент диффузии $D=2\gamma\xi^2$

Модификация уравнения самосогласования

Исходное уравнение для бесконечной системы

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D(\omega)}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int\limits_0^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-i\omega/D(\omega)] + q^2}$$

в закрытой конечной имеет вид

$$\frac{E^2}{W^2} = \Lambda^{2-d} \cdot \frac{1}{L^d} \sum_{\mathrm{q}}^{(c)} \frac{1}{m^2 + q^2}, \qquad m^{-1} = \xi_{0D}$$

тогда как в открытой

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D_L}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \cdot \frac{1}{L^d} \sum_{\mathrm{q}}^{(o)} \frac{1}{m^2 + q^2}$$

Беря разность

$$\boxed{D_L = D_{min} \Lambda^{2-d} \cdot \frac{1}{L^d} \left(\sum_{\mathrm{q}}^{(c)} \frac{1}{m^2 + q^2} - \sum_{\mathrm{q}}^{(o)} \frac{1}{m^2 + q^2} \right)}$$

Используя блоховские граничные условия

$$f(L) = f(0)e^{i\varphi}$$

и принимая в качестве эталонных периодические ($\varphi=0$)
и антипериодические ($\varphi=\pi$), имеем «определение по Таулесу»

$$g_L = L^{d-2} \cdot \frac{1}{L^d} \left(\sum_{\mathrm{q}}^{(\varphi=0)} \frac{1}{m^2+q^2} - \sum_{\mathrm{q}}^{(\varphi=\pi)} \frac{1}{m^2+q^2} \right)$$

которое обеспечивает экспоненту в локализованной фазе

$$g_L = L^{d-2} \cdot \frac{4\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} \left(\frac{mL}{2} \right)^{(1-d)/2} e^{-mL}$$

Происхождение экспоненты

При оценке интегралов от быстро осциллирующих функций

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

существенны аналитические свойства $f(x)$. Если $f(x)$ имеет скачок n-й производной, то

$$f_\omega \sim \omega^{-n-1}$$

Если $f(x)$ регулярна на действительной оси, то

$$f_\omega \sim \exp(-const \cdot \omega)$$

Аналогичная ситуация – при оценке интеграла дискретной суммой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(x_s)|_{x_s = hs}$$

Используя формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(x-s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi kx}$$

имеем

$$h\sum_{s=-\infty}^{\infty} f(x_s)|_{x_s=hs} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i2\pi kx/h}\, dx$$

Член с k=0 соответствует континуальному приближению.
Эффект дискретности имеет порядок

$$\exp(-const/h)$$

В нашем случае $h \sim 1/L$, что дает

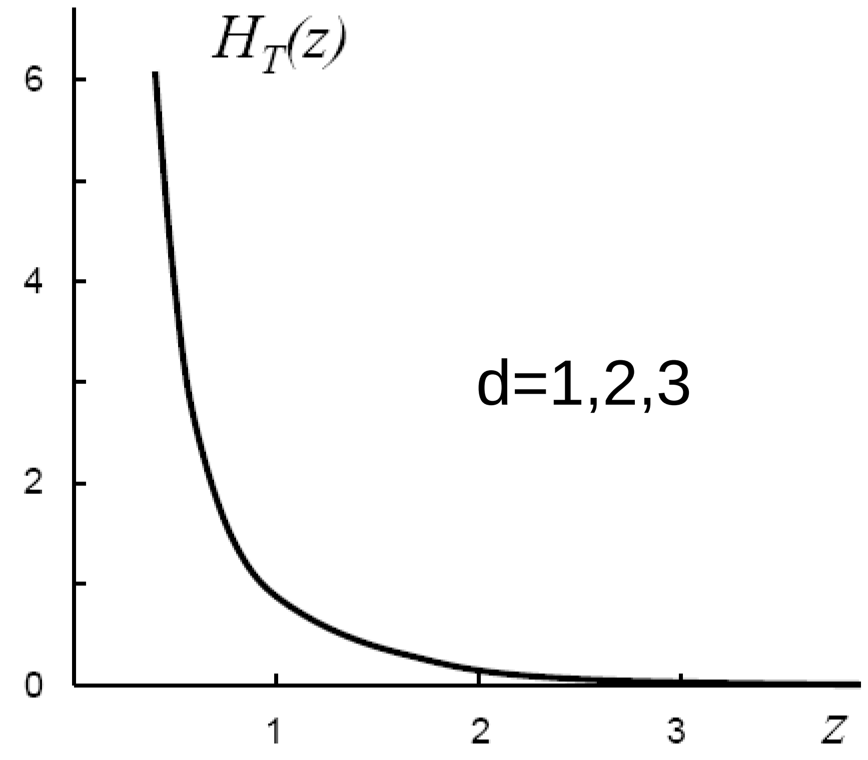
$$g_L \sim \exp\{-const \cdot L\}$$

Скейлинговое соотношение для g_L

Результат можно записать в виде скейлингового соотношения:

$$g_L = H_T\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right)$$

где $H_T(z)$ соответствует определению по Таулесу:

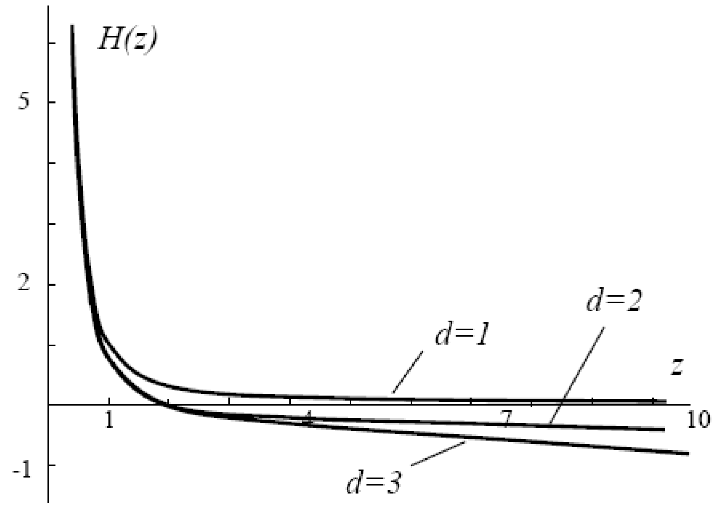


$$H_T(z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\mathbf{t}} \frac{(-1)^{2t_1}}{|\mathbf{t}|^2 + (z/2\pi)^2}$$

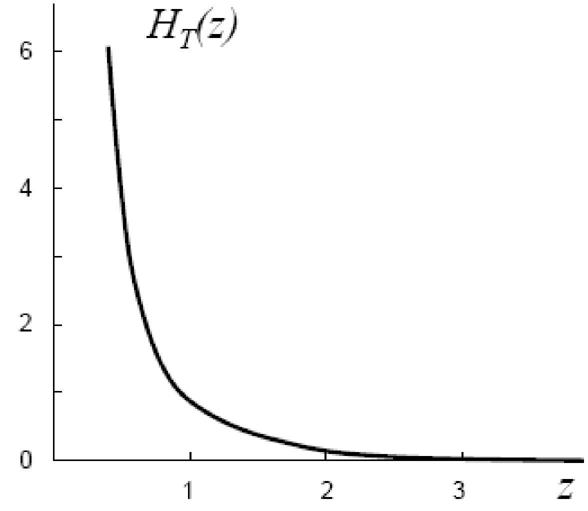
$$\mathbf{t} = (\tfrac{1}{2}s_1, s_2, \ldots, s_d), \qquad s_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Скейлинговые уравнения

$$\pm c_d \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right)$$



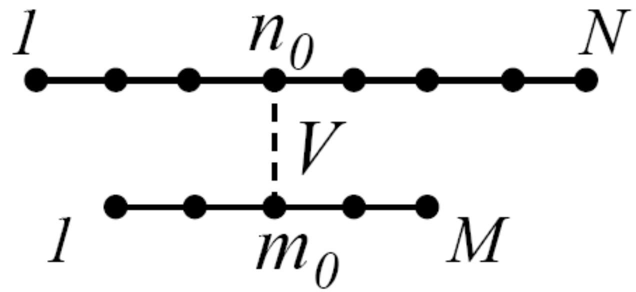
$$g_L = H_T\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right)$$



Использование модели оболочек

Связь конечной и бесконечной цепочек

$$H=\begin{pmatrix} H_1 & \dots V \dots \\ \dots V \dots & H_2 \end{pmatrix}$$



Гамильтониан возмущения

$$V_{nn'} = V\left(\delta_{nn_0}\delta_{n'm_0} + \delta_{nm_0}\delta_{n'n_0}\right)$$

Уравнение Дайсона

$$G_{nn'} = G^0_{nn'} + G^0_{nn_0} V G_{m_0 n'} + G^0_{nm_0} V G_{n_0 n'}$$

$$H = H_0 + V$$

$$G = (E - H)^{-1}$$

$$G_0 = (E - H_0)^{-1}$$

$$G = G_0 + G_0 V G$$

Проекция решения на подпространство 1

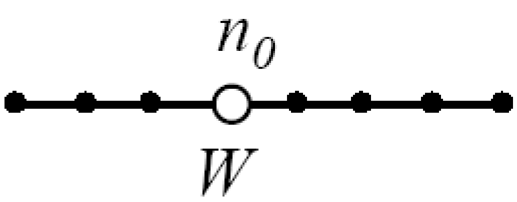
$$G_{nn'} = G^0_{nn'} + G^0_{nn_0}\frac{V^2 G^0_{m_0m_0}}{1 - V^2 G^0_{m_0m_0} G^0_{n_0n_0}} G_{n_0n'}\,, \qquad n, n' = 1,\, 2, \ldots, N$$

и подпространство 2

$$G_{mm'} = G^0_{mm'} + G^0_{mm_0}\frac{V^2 G^0_{n_0n_0}}{1 - V^2 G^0_{m_0m_0} G^0_{n_0n_0}} G_{m_0m'}$$

Качественные следствия:

1. Эффективный рассеиватель



В подпространстве 1 можно пользоваться эффективным гамильтонианом возмущения

$$V_{nn'} = W\delta_{nn_0}\delta_{n'n_0}\,, \qquad W = V^2 G^0_{m_0m_0}$$

2. Затухание в конечной цепочке

Функция Грина нижней цепочки

$$G^0_{mm'} = \sum_s \frac{e_s(m)e^*_s(m')}{E-\epsilon_s+i0}$$

в окрестности ε_s представляется одним членом. Подставляя его в

$$G_{mm'} = G^0_{mm'} + G^0_{mm_0}\frac{V^2G^0_{n_0n_0}}{1-V^2G^0_{m_0m_0}G^0_{n_0n_0}}G_{m_0m'}$$

получим

$$G_{mm'} = \frac{e_s(m)e^*_s(m')}{E-\epsilon_s-V^2G^0_{n_0n_0}|e_s(m_0)|^2}, \qquad E\approx\epsilon_s$$

где

$$G^0_{nn} = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{E-\epsilon(k)+i0} \equiv I(E)-i\pi\nu(E)$$

Возникает эффективная функция Грина

$$\tilde{G}_{mm'} = \sum_s \frac{e_s(m)e^*_s(m')}{E-\tilde{\epsilon}_s+i\gamma_s}, \qquad \gamma_s = \pi V^2\nu(\epsilon_s)|e_s(m_0)|^2$$

3. Эффективная T-матрица

Комбинация

$$T = \frac{V^2 G^0_{m_0 m_0}}{1 - V^2 G^0_{m_0 m_0} G^0_{n_0 n_0}}$$

есть фактически T-матрица рассеяния: ее подстановка в борновкую амплитуду дает точный результат.

Рассматривая ее в окрестности уровня ε_s, получим как и выше

$$T \approx V^2 \tilde{G}_{m_0 m_0}$$

тогда как в борновском приближении

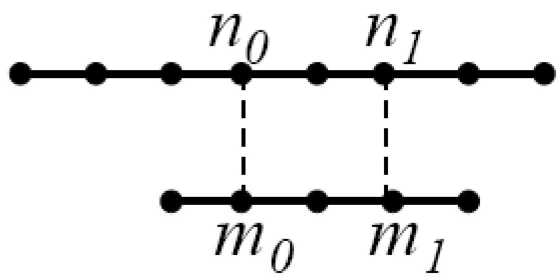
$$T = V^2 G^0_{m_0 m_0}$$

Это дает простой способ перехода от борновского результата к точному.

Использование модели оболочек

Несколько связей между цепочками

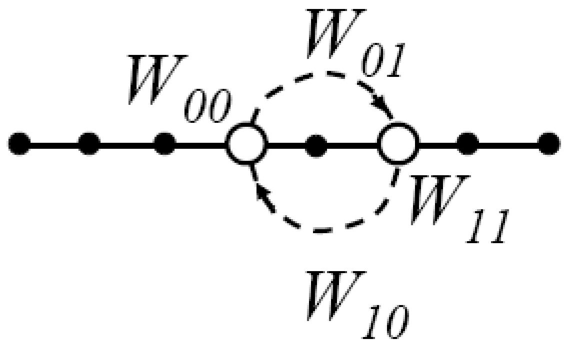
Уравнение Дайсона



$$G_{nn'} = G^0_{nn'} + \sum_i \left(G^0_{nn_i} V G_{m_i n'} + G^0_{nm_i} V G_{n_i n'} \right)$$

Если n и n′ лежат на верхней цепочке, то $G^0_{nm_i} = 0$ и имеем упрощение

$$G_{nn'} = G^0_{nn'} + \sum_i G^0_{nn_i} V G_{m_i n'}$$



С другой стороны, полагая $n = m_i$

$$G_{m_i n'} = \sum_j G^0_{m_i m_j} V G_{n_j n'}$$

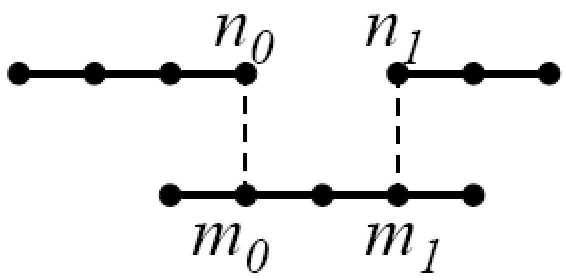
откуда

$$G_{nn'} = G^0_{nn'} + \sum_{ij} G^0_{nn_i} \cdot V^2 G^0_{m_i m_j} \cdot G_{n_j n'}$$

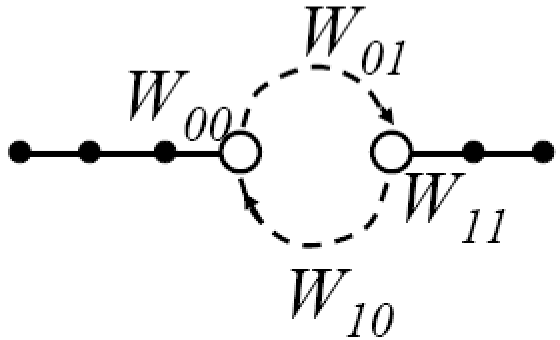
$$\boxed{W_{ij} = V^2 G^0_{m_i m_j}}$$

Использование модели оболочек

Разорванная верхняя цепочка



Формально все выражения сохраняются, но под $G^0_{nn'}$ нужно понимать функции Грина, учитывающие разрыв цепочки.



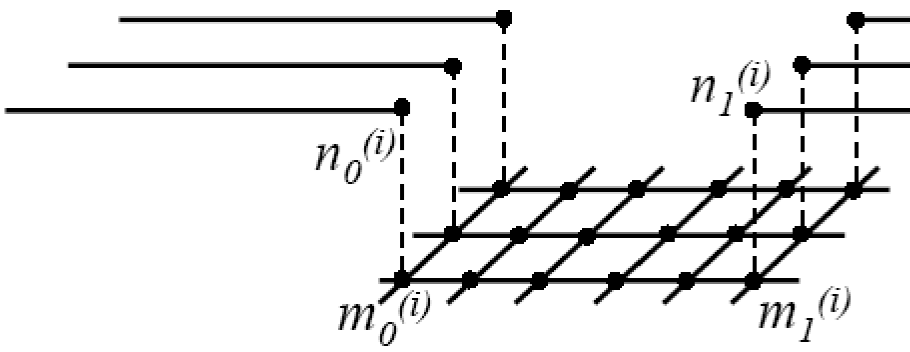
Для коэффициента прохождения

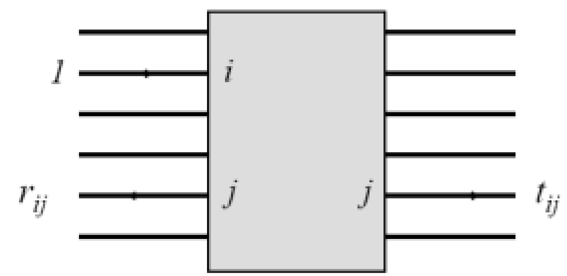
$$T \propto |W_{01}|^2$$

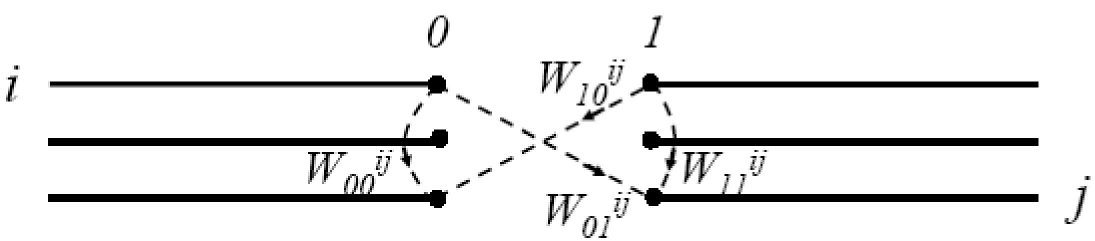
$$W_{ij} = V^2 \, G^0_{m_i m_j}$$

Использование модели оболочек

Многоканальный случай







$$t_{js} = -2ie^{2ik} \sin k \frac{W_{10}^{sj}}{J}$$

Используя формулу Эконому – Соуколиса

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{ij} |t_{ij}|^2$$

имеем в борновском приближении

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} 4\sin^2 k_F \frac{V^4}{J^2} \sum_{ij} \left| G^0_{m_0^{(i)} m_1^{(j)}} \right|^2$$

Главное отличие точного результата – учет затухания

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} 4\sin^2 k_F \frac{V^4}{J^2} \sum_{r_\perp, r'_\perp} \left| \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|^2_{|x'-x|=L}$$

$$\gamma_s = \pi V^2 \nu_F \sum_i |e_s(m_i)|^2$$

Выражая через коррелятор плотности

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} 4\sin^2 k_F \frac{V^4}{J^2} \sum_{r_\perp, r'_\perp} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{|x-x'|=L}$$

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{L^d} \sum_{\mathrm{q}} \frac{2\pi\nu_F \, e^{i\mathrm{q}\cdot(\mathrm{r}-\mathrm{r}')}}{-i\omega + D(\omega, q) q^2}$$

Т-матрица в многоканальном случае

Если $\Phi(r) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ - плоская волна, а $\Psi(r)$ - решение задачи рассеяния, то справедливо уравнение Липпмана – Швингера

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + G_0 V\,|\Psi\rangle$$

которое можно решать итерациями

$$|\Psi\rangle = \{1 + G_0 V + G_0 V G_0 V + G_0 V G_0 V G_0 V + \ldots\}\,|\Phi\rangle$$

Полагая $G_0 = G_1 + G_2$ и учитывая, что V связывает только G_1 и G_2

$$|\Psi\rangle = \{1 + G_1 V G_2 V + G_1 V G_2 V G_1 V G_2 V + \ldots\}\,|\Phi\rangle$$

где $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ лежат в подпространстве 1. Поскольку $|\Psi\rangle = S\,|\Phi\rangle$, то

$$S = 1 + G_1 V G_2 V \frac{1}{1 - G_1 V G_2 V}$$

Поскольку Т-матрица вводится соотношением $V\,|\Psi\rangle = T\,|\Phi\rangle$,
то $S = 1 + G_0 T$, что в подпространстве 1 сводится к $S = 1 + G_1 T$.
Отсюда формально точный результат

$$T = VG_2V\frac{1}{1 - G_1VG_2V} = V\frac{1}{E - H_2 - VG_1V}V$$

Полюса Т-матрицы определяются собственными значениями оператора $H_2 + VG_1V$, которые находятся по теории Возмущений

$$\lambda_s = \epsilon_s + \langle e_s|\,VG_1V\,|e_s\rangle$$

Подстановка матричных элементов V дает

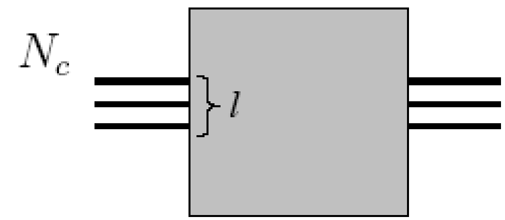
$$\lambda_s = \tilde{\epsilon}_s - i\gamma_s\,, \qquad \gamma_s = \pi V^2 \nu_F \sum_i |e_s(m_i)|^2$$

Определение проводимости конечной системы

Опуская несущественные множители

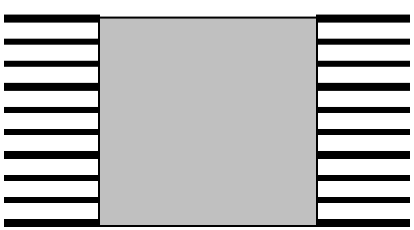
$$g_L = \frac{V^4}{J^4}\frac{J}{D_L}\sum_{r_\perp, r'_\perp} K(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big|_{|x-x'|=L} \qquad K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{L^d}\sum_{\mathrm{q}} \frac{e^{i\mathrm{q}\cdot(\mathrm{r}-\mathrm{r}')}}{m^2+q^2}$$

Для «тонких» контактов



$$g_L = \frac{V^4}{J^4}N_c^2\frac{J}{D_L}\ K(x,x')\Big|_{|x-x'|=L}$$

$$\gamma \sim V^2 \nu_F N_c L^{-d} \sim \frac{V^2}{J^2} N_c \Delta$$



Эффективная прозрачность границы

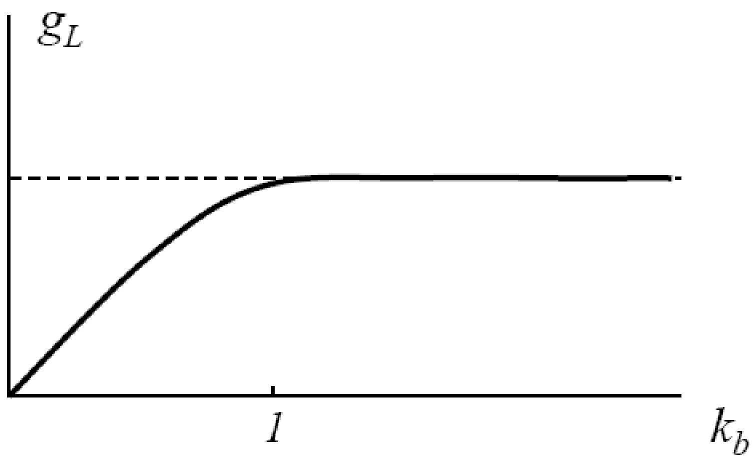
$$k_b = \frac{V^2}{J^2} N_c$$

$$l \ll \sqrt{L\xi}$$

$$g_L = \frac{V^4}{J^4} N_c^2 \frac{J}{D_L} \; K(x,x')|_{|x-x'|=L}$$

$$k_b = \frac{V^2}{J^2} N_c$$

$$\gamma \sim V^2 \nu_F N_c L^{-d} \sim \frac{V^2}{J^2} N_c \Delta$$



Замечая, что

$$g_L \propto \frac{k_b^2}{D_L} \propto k_b$$

и оценивая коэффициент из условия

$$D_L \sim JL^{2-d} \qquad \text{при} \quad k_b \sim 1$$

имеем

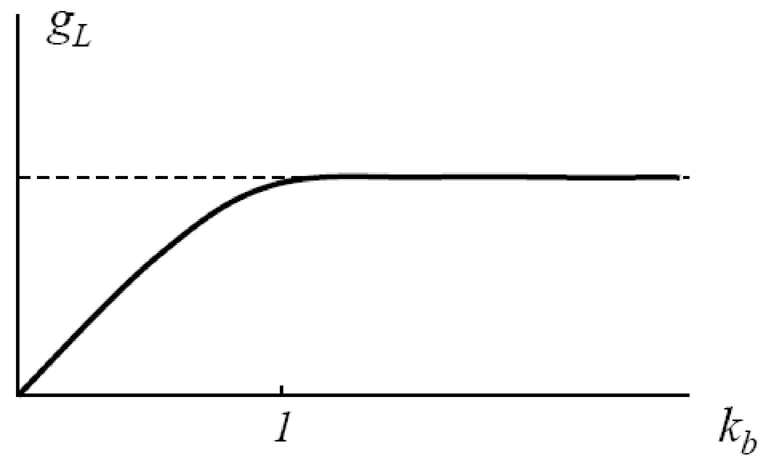
$$g_L = k_b L^{d-2} \; K(x,x')|_{|x-x'|=L}$$

Определение проводимости конечной системы

После некоторых преобразований:

$$g_L = k_b L^{d-2}\ K(x,x')\big|_{|x-x'|=L}$$

Предельно открытой системе соответствует плато при $k_b \gtrsim 1$.



Вместо того, чтобы полагать $k_b \sim 1$, можно взять производную

$$g_L^{open} = \left.\frac{dg_L(k_b)}{dk_b}\right|_{k_b=0} = L^{d-2}\ K(x,x')\big|_{|x-x'|=L}$$

что определяет проводимость предельно открытой системы в терминах почти закрытых систем

Определение проводимости конечной системы

$$g_L^{open} = \left.\frac{dg_L(k_b)}{dk_b}\right|_{k_b=0} = L^{d-2}\ K(x,x')\big|_{|x-x'|=L}$$

Преимущества такого определения:

(а) Оно заведомо характеризует внутренние свойства системы;

(б) Решается вопрос о контактном сопротивлении резервуара;

(в) Кондактанс идеальной системы является бесконечным

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{m^2+q^2} \qquad\qquad m^{-1} = \xi_{0D}$$

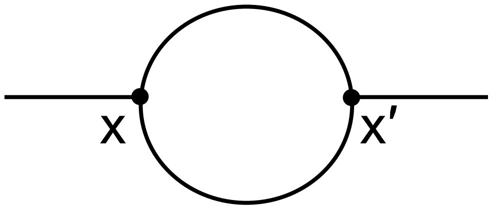
(расходимость при $m \to 0$ связана с существованием разрешенного значения $q=0$)

Эквивалентность с определением по Таулесу

$$g_L^{open} = \left.\frac{dg_L(k_b)}{dk_b}\right|_{k_b=0} = L^{d-2}\ K(x,x')|_{|x-x'|=L} \qquad K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{m^2+q^2}$$

(a) Периодические граничные условия

Поперечный размер системы L ,
продольный 2L , |x-x′|=L .



$$K(x,x') = \frac{1}{2L}\sum_s \left.\frac{e^{iq_sL}}{q_s^2+m^2}\right|_{q_s=\frac{2\pi s}{2L}} = \frac{1}{2L}\sum_s \left.\frac{(-1)^s}{q_s^2+m^2}\right|_{q_s=\frac{2\pi s}{2L}}$$

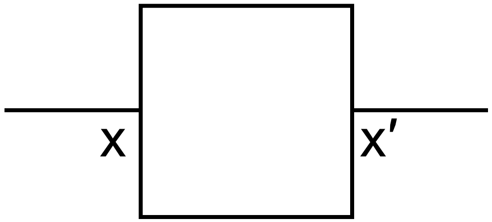
Разделяя четные и нечетные s

$$K(x,x') = \frac{1}{2L}\left(\sum_s \left.\frac{1}{q_s^2+m^2}\right|_{q_s=\frac{2\pi s}{L}} - \sum_s \left.\frac{1}{q_s^2+m^2}\right|_{q_s=\frac{2\pi s+\pi}{L}}\right)$$

Для блоховских условий $q_s = (2\pi s+\varphi)/L$, т.е. имеем разность двух членов с $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

(б) Реалистические граничные условия

$$f'_x(0) = \kappa f(0)\,, \qquad f'_x(L) = -\kappa f(L)$$



Выражение для ядра

$$K(x,x') = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 \, \frac{\sin(q_s x + \psi_s)\sin(q_s x' + \psi_s)}{q_s^2 + m^2}\,,$$

$$A_s^2 = \frac{2}{L + 2\kappa/(q_s^2 + \kappa^2)}\,, \qquad \psi_s = \arctan(q_s/\kappa)\,,$$

$$q_s L + 2\arctan(q_s/\kappa) = \pi s\,, \qquad s = 1,2,3,\ldots$$

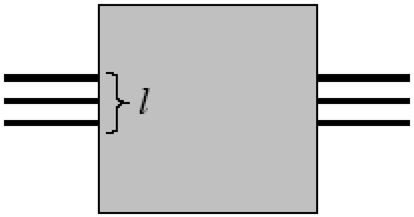
Для закрытой системы (κ=0) имеем

$$K(0,L) = \frac{1}{L}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left.\frac{\cos(q_s L)}{q_s^2 + m^2}\right|_{q_s = \frac{\pi s}{L}}$$

с тем же результатом.

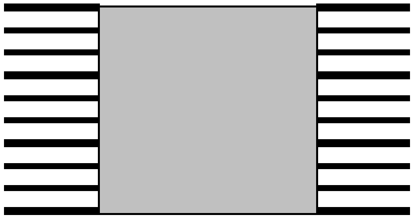
«Массивные» контакты

Если для тонких контактов



$$g_L^{open} = L^{d-2}\ K(x,x')|_{|x-x'|=L}$$

то для массивных



$$g_L^{open} = L^{d-2} \frac{1}{N_c^2} \sum_{r_\perp, r'_\perp} K(\mathbf{r},\mathbf{r}')|_{|x-x'|=L}$$

Суммирование по $r_\perp, r'_\perp$ устраняет поперечные компоненты q в сумме

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{m^2+q^2}$$

что делает задачу эффективно одномерной.

В зависимости от геометрии контактов имеем определения по Таулесу разной размерности.

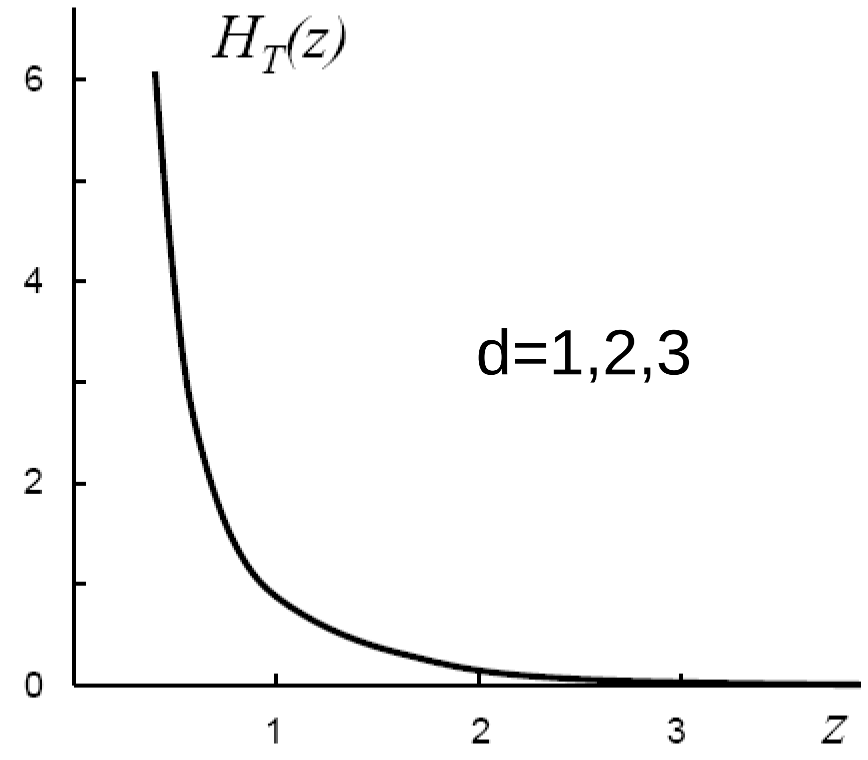
Скейлинговое соотношение для g_L

Результат рассмотрения:

$$g_L = H_T\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right)$$

где $H_T(z)$ соответствует d-мерному определению по Таулесу:

$$H_T(z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\mathbf{t}} \frac{(-1)^{2t_1}}{|\mathbf{t}|^2 + (z/2\pi)^2}$$



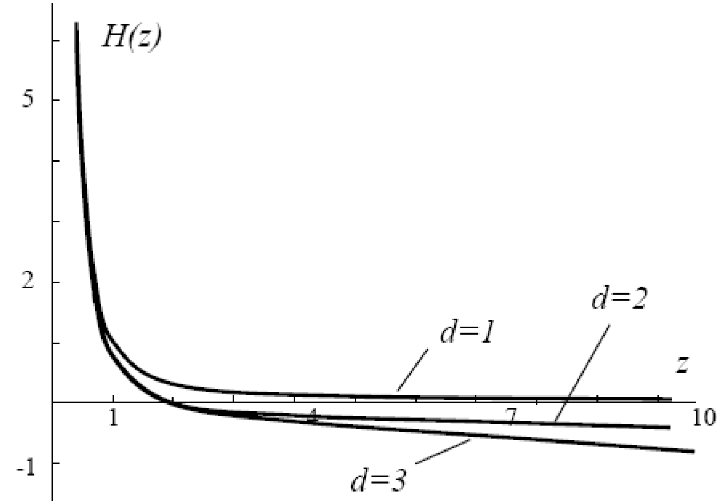
$$\mathbf{t} = (\tfrac{1}{2}s_1, s_2, \ldots, s_d), \qquad s_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Скейлинговые уравнения

Зависимость g_L от L/ξ дается в параметрической форме:

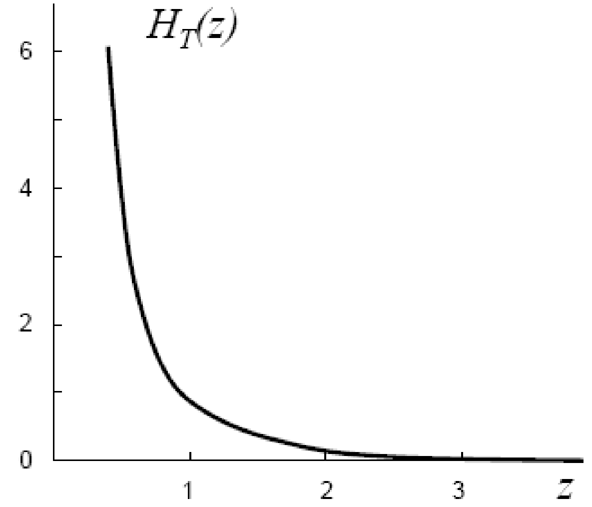
d≠2

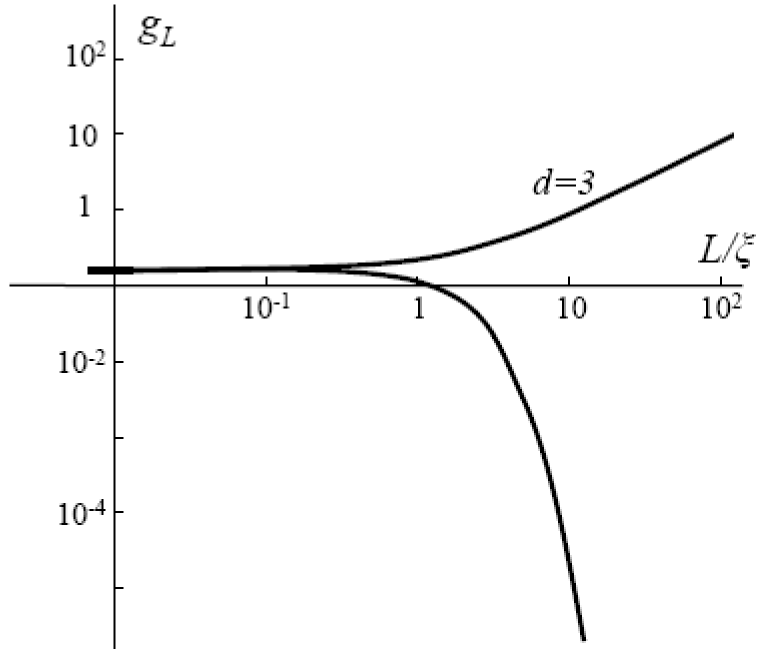
$$\pm c_d \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H(z) \;, \qquad g_L = H_T(z)$$



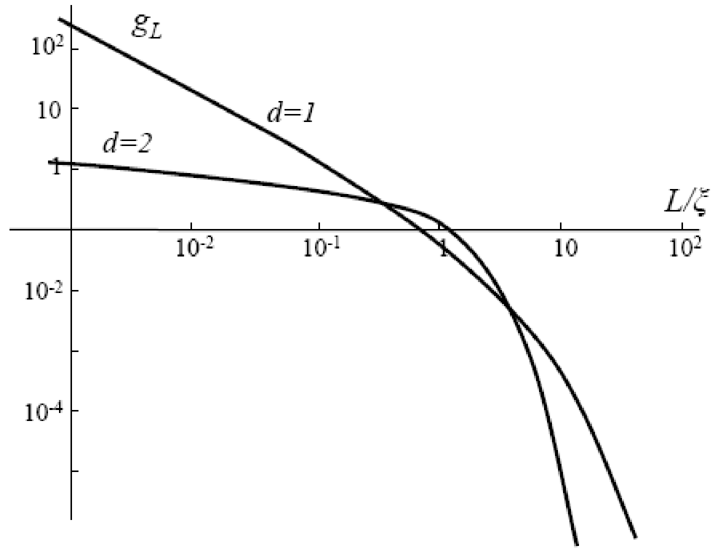
d=2

$$\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\xi}{L}\right) = H(z) \;, \qquad g_L = H_T(z)$$





g_L
10^2
10
1
10^{-2}
10^{-4}
d=3
L/ξ
10^{-1}
1
10
10^2



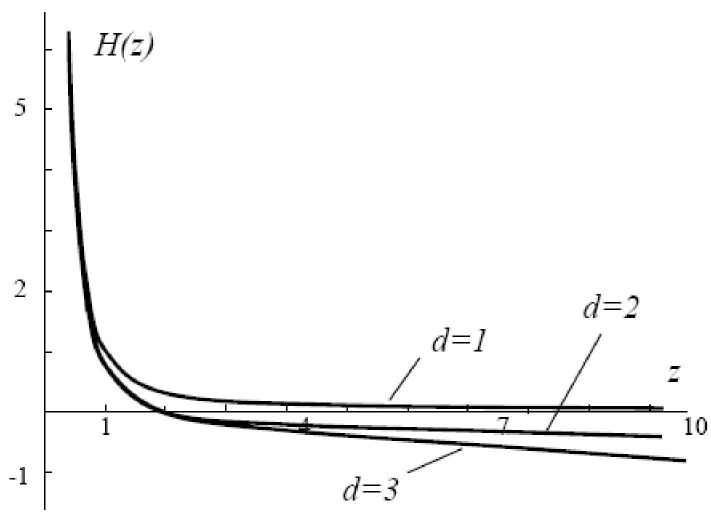
g_L
10^2
10
1
10^{-2}
10^{-4}
d=1
d=2
L/ξ
10^{-2}
10^{-1}
1
10
10^2

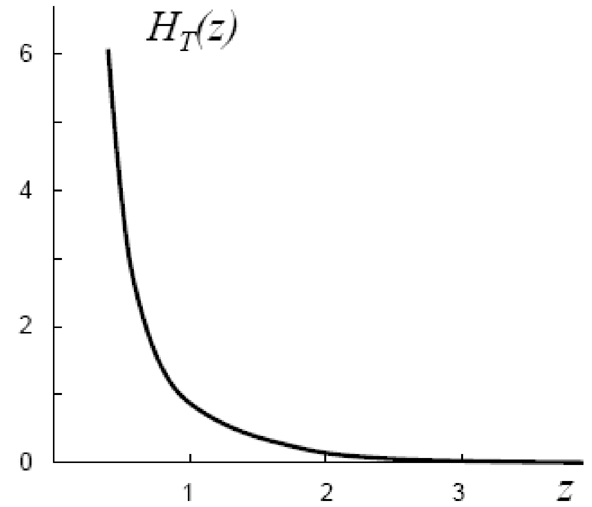
Для β -функции, определяемой производной $d \ln g / d \ln L$, имеем для d≠2

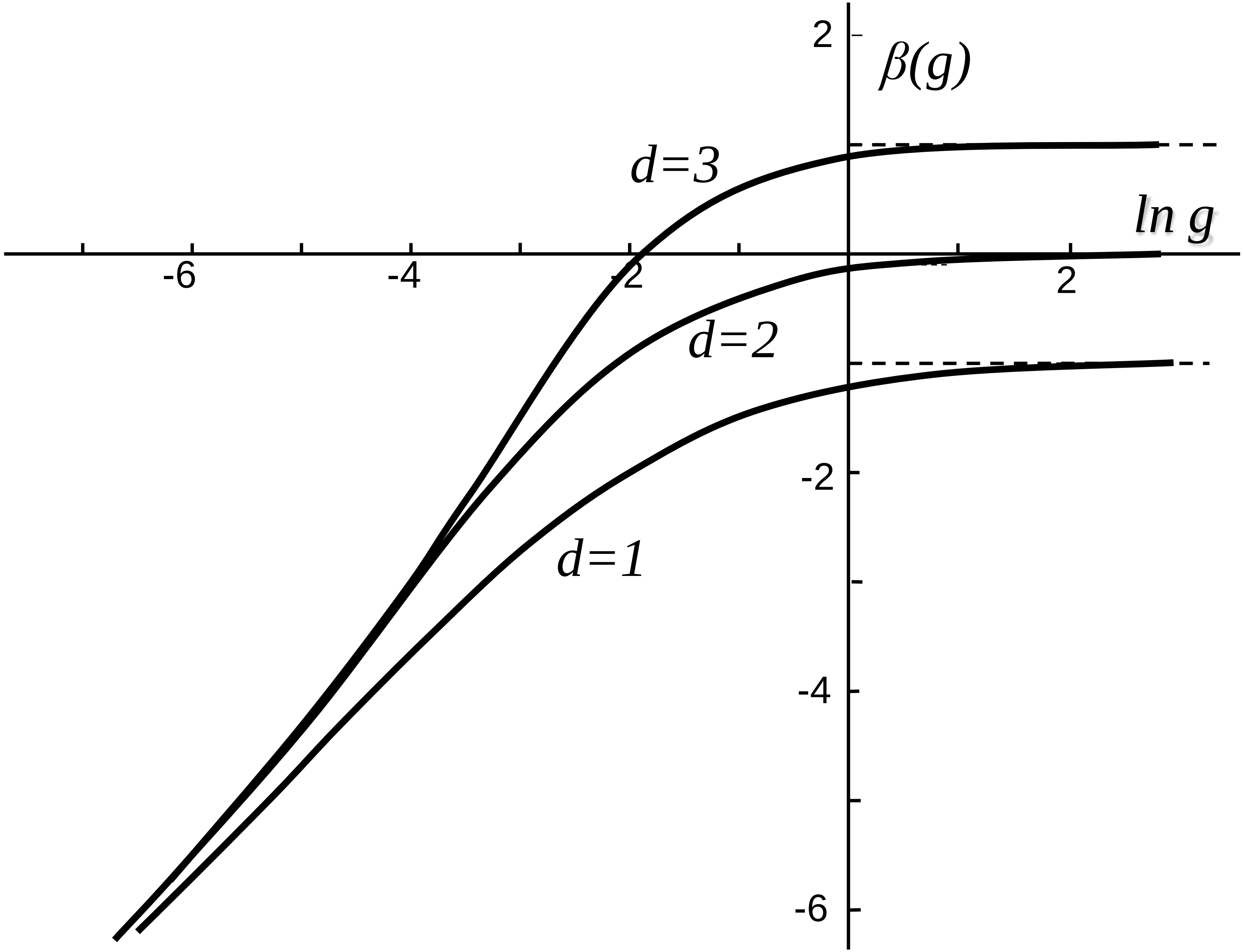
$$g = H_T(z)\,, \qquad \beta(g) = (d-2)\frac{H(z)H_T'(z)}{H_T(z)H'(z)}$$

и для d=2

$$g = H_T(z)\,, \qquad g\beta(g) = -\frac{1}{2\pi}\frac{H_T'(z)}{H'(z)}$$



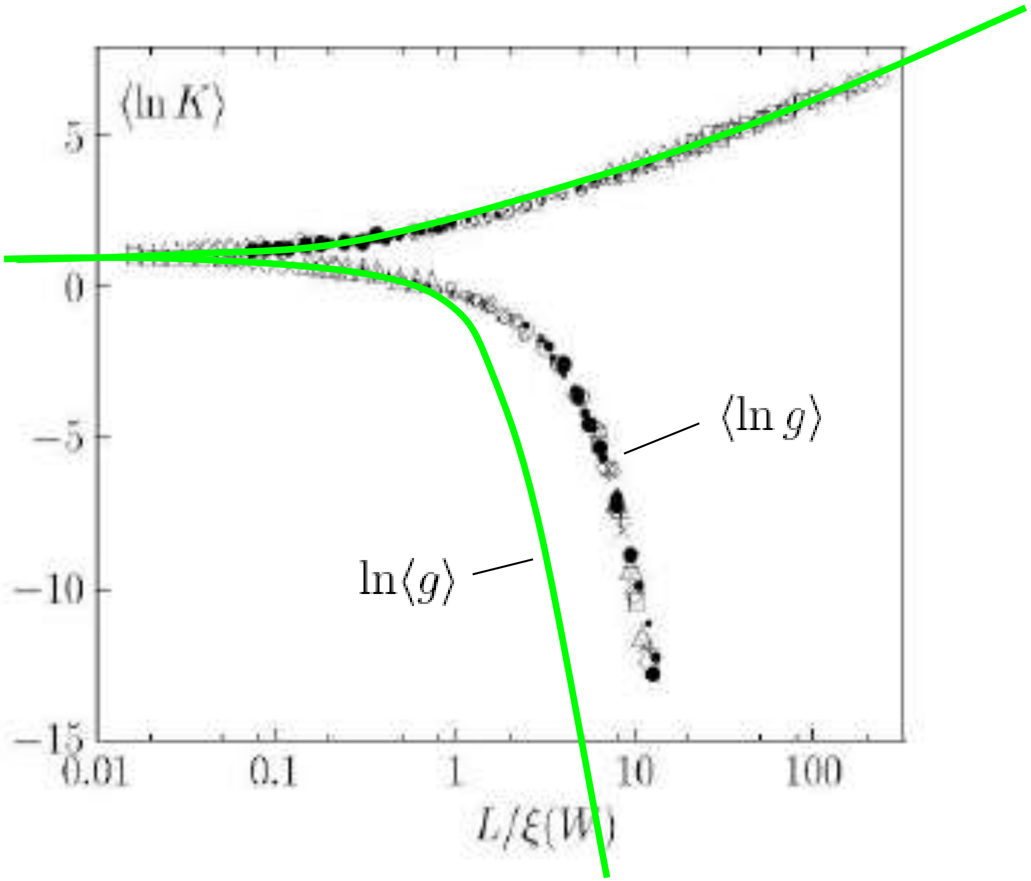




2
$\beta(g)$
$d=3$
$\ln g$
-6
-4
-2
2
$d=2$
-2
$d=1$
-4
-6

И.Х.Жарекешев, Вестник Евразийского НУ 77, 41 (2010).

d=3



Оценка g_L через «ускорение» уровней

$$K_s = \frac{d^2 E_s}{d\varphi^2}$$

$$\psi(L) = \psi(0)\ \exp\{i\varphi\}$$

В одномерном случае

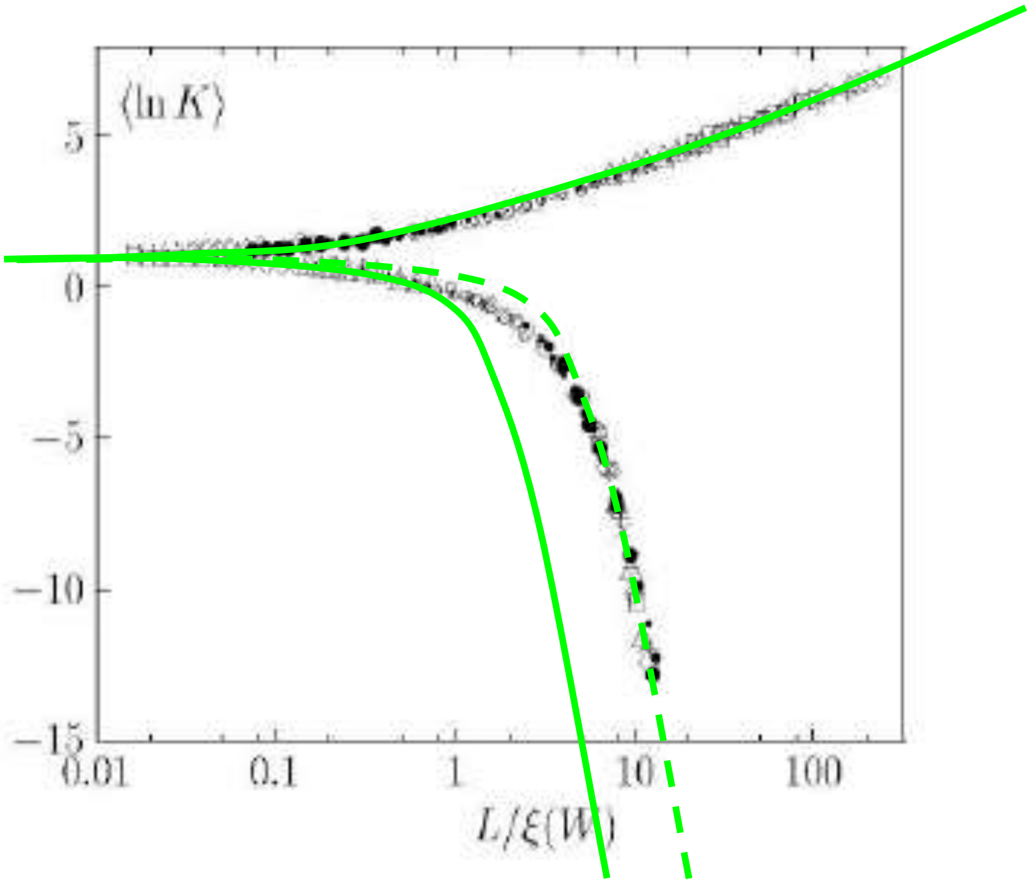
$$\langle g \rangle = \tfrac{\pi}{2}\,(\alpha L/\pi)^{-3/2}\ e^{-\alpha L/4}$$

$$\exp\langle \ln g \rangle = 4\,e^{-\alpha L}$$

$$\langle 1/g \rangle = \tfrac{1}{2}\,e^{2\alpha L}$$

И.Х.Жарекешев, Вестник Евразийского НУ 77, 41 (2010).

d=3



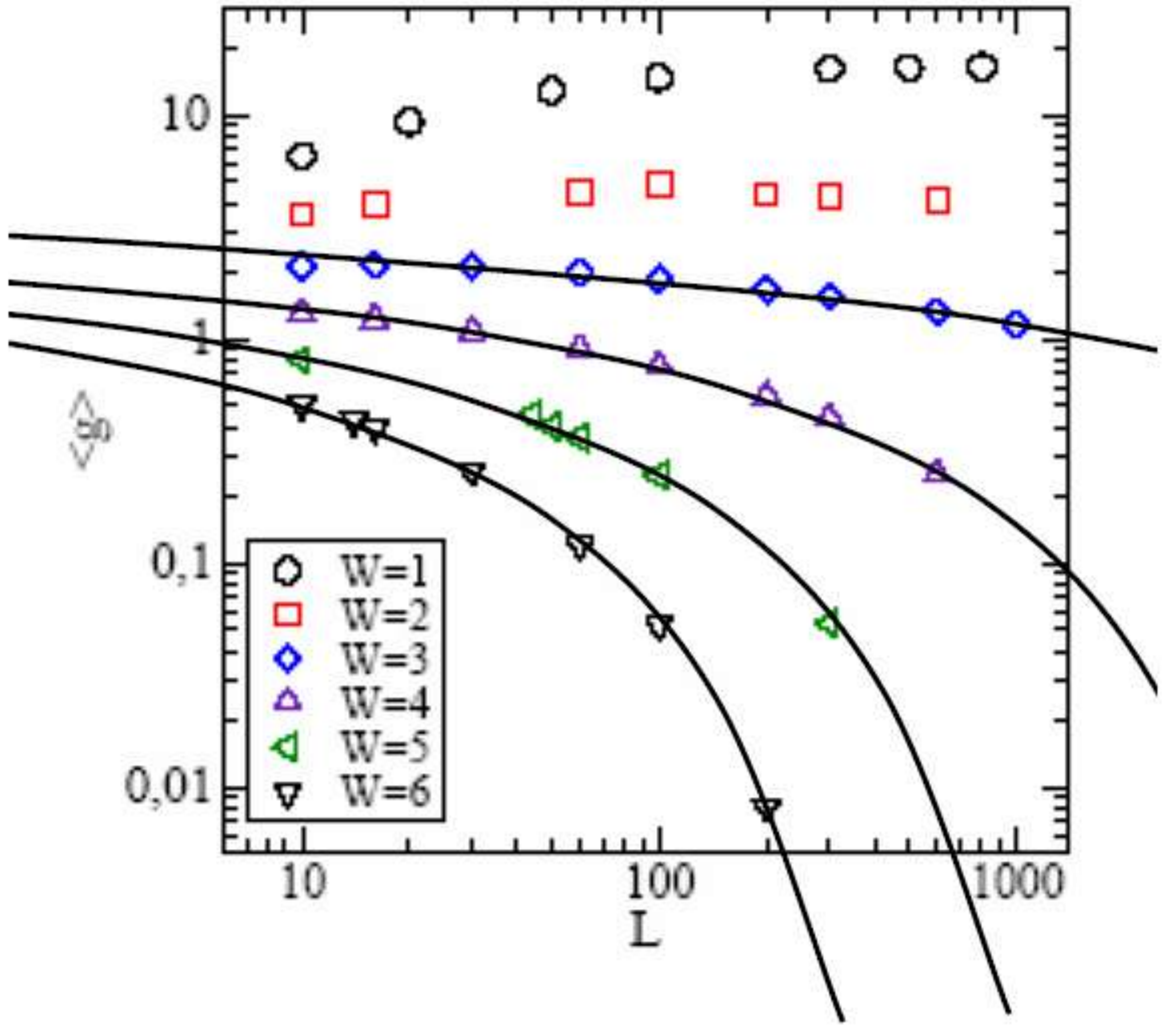
Оценка g_L через «ускорение» уровней

$$K_s = \frac{d^2 E_s}{d\varphi^2}$$

$$\psi(L) = \psi(0)\ \exp\{i\varphi\}$$

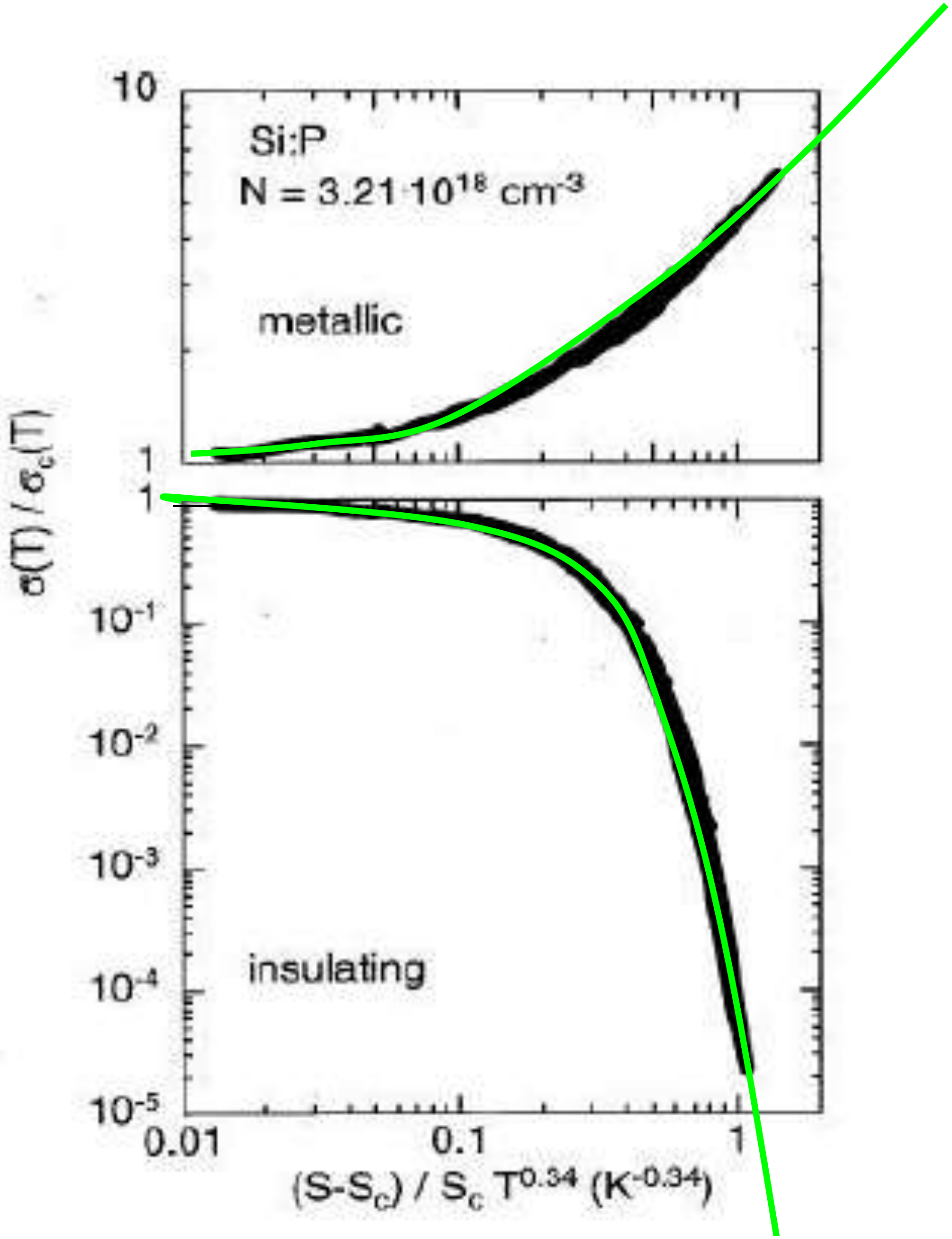
P. Markos, acta physica slovaca 56, 561 (2006)

d=2



S. Waffenschmidt,
C. Pfleiderer,
H. V. Loehneysen,
Phys. Rev. Lett.
83, 3005 (1999).

$$L \quad \rightarrow \quad L_{in} \propto T^{-\gamma}$$

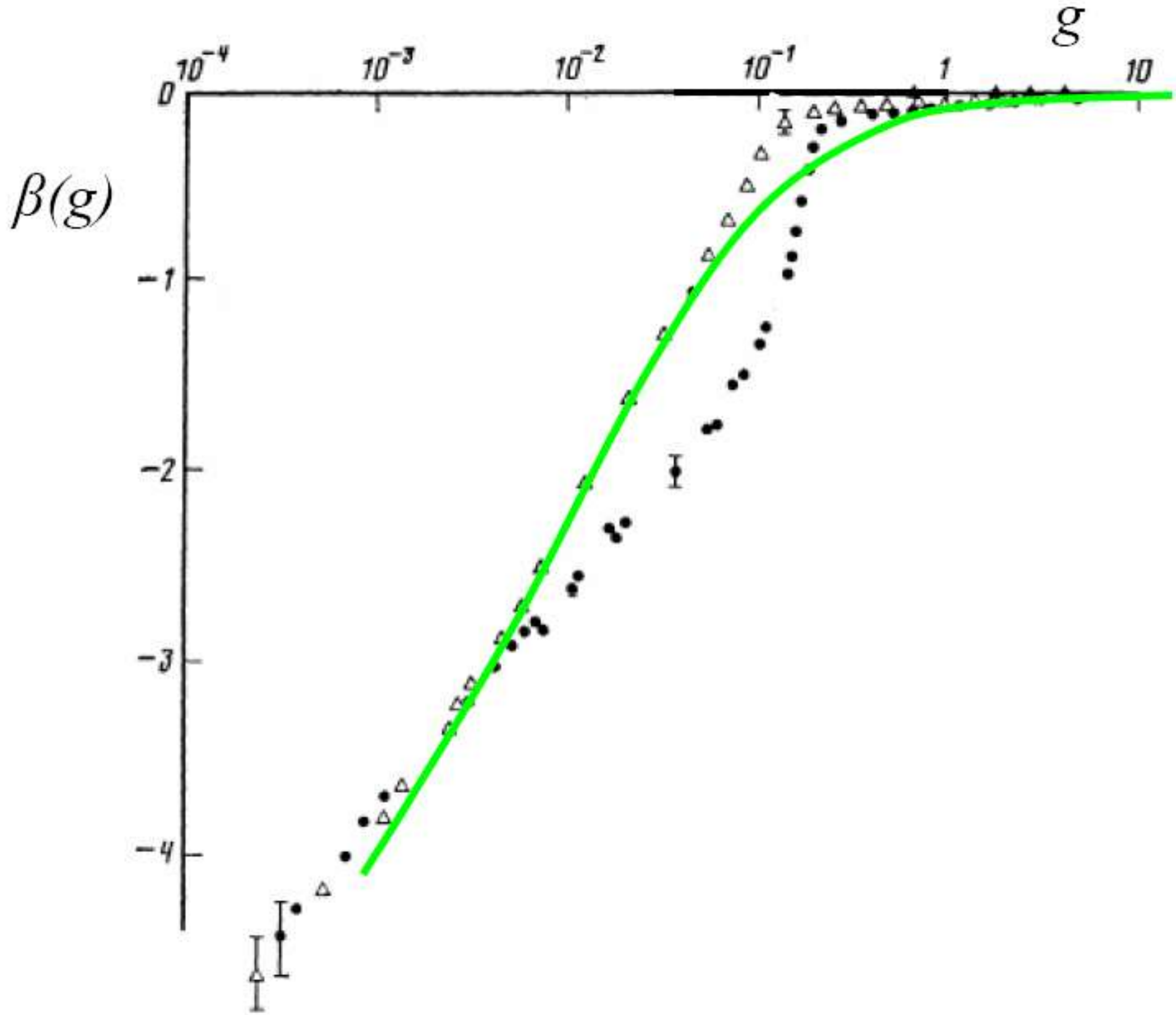


Критическое
поведение

$$s = 1.0 \pm 0.1$$

$$z = 2.94 \pm 0.3$$

Э. И. Заварицкая, ЖЭТФ **93**, 952 (1987).



Сравнение с теорией возмущений

Разложение функций H(z) и $H_T(z)$

$$H(z) = 1/z^2 + a_0 - a_2 z^2 + a_4 z^4 - a_6 z^6 + \ldots$$

$$H_T(z) = 1/z^2 + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_4 z^4 - \tilde{a}_6 z^6 + \ldots$$

где

$$a_{2n} = \sum_{\mathrm{s}\neq 0} \frac{1}{(2\pi|\mathrm{s}|)^{2n+2}}\,, \qquad \tilde{a}_{2n} = \sum_{\mathrm{t}\neq 0} \frac{(-1)^{2t_1}}{(2\pi|\mathrm{t}|)^{2n+2}}$$

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_d)\ , \qquad \mathbf{t} = (\tfrac{1}{2}s_1, s_2, \ldots, s_d)\ , \qquad s_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Откуда для β-функций

$$\beta(g) = (d-2) + \frac{a_0 - \tilde{a}_0}{g} + \ldots\,, \qquad d \neq 2$$

$$\beta(g) = -\frac{1}{2\pi g} + \frac{a_2 - \tilde{a}_2}{2\pi g^3} + \ldots\,, \qquad d = 2\,.$$

Разложение из σ-моделей для d=2

$$\tilde{\beta}(t) = -\frac{dt}{d\ln L} = -2t^2 + 0 \cdot t^3 + 0 \cdot t^4 - 12\zeta(3)t^5 + (27/2)\zeta(4)t^6 + \ldots$$

где $t \sim 1/g$. Пересчитывая к той же форме наш результат

$$\tilde{\beta}(t) = -2t^2 + 0 \cdot t^3 + 32\pi^4(a_2 - \tilde{a}_2)t^4 + \ldots$$

видим, что коэффициент при t^4 зависит от деталей определения g_L , т.е. ренормировочной схемы.

Замена переменных

$$\tilde{t} = f(t)$$

позволяет привести два результата к одинаковому виду.

Переход к размерности d=2+ε производится в схеме размерной регуляризации

$$\beta_{2+\epsilon}(g) = \epsilon + \beta_2(g)$$

$$\nu = 1/\epsilon - (9/4)\zeta(3)\epsilon^2 + \dots$$

Точный результат $\nu = 1/\epsilon$ возможен только для тривиальной функции $\beta_2(g) = A/g$.

Если теория Вольхардта – Вольфле является точной, то формализм размерной регуляризации несовместим с физической сутью проблемы.

Подтверждающие аргументы:

F. Wegner, Z. Phys. B **78**, 33 (1990).

P. K. Mitter, H. R. Ramadas, Commun. Math. Phys. **122**, 575 (1989).

О наблюдении закона Березинского

Локализационный закон для проводимости

$$\sigma(\omega) \propto -i\omega, \qquad \omega \to 0$$

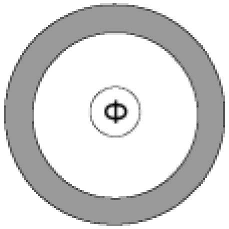
получен теоретически почти 40 лет назад:

В. Л. Березинский, ЖЭТФ 65, 1251 (1973).

но никогда не наблюдался экспериментально.

Его наблюдение возможно в закрытых системах примерно при тех же условиях, что наблюдение незатухающего тока в геометрии Ааронова-Бома:

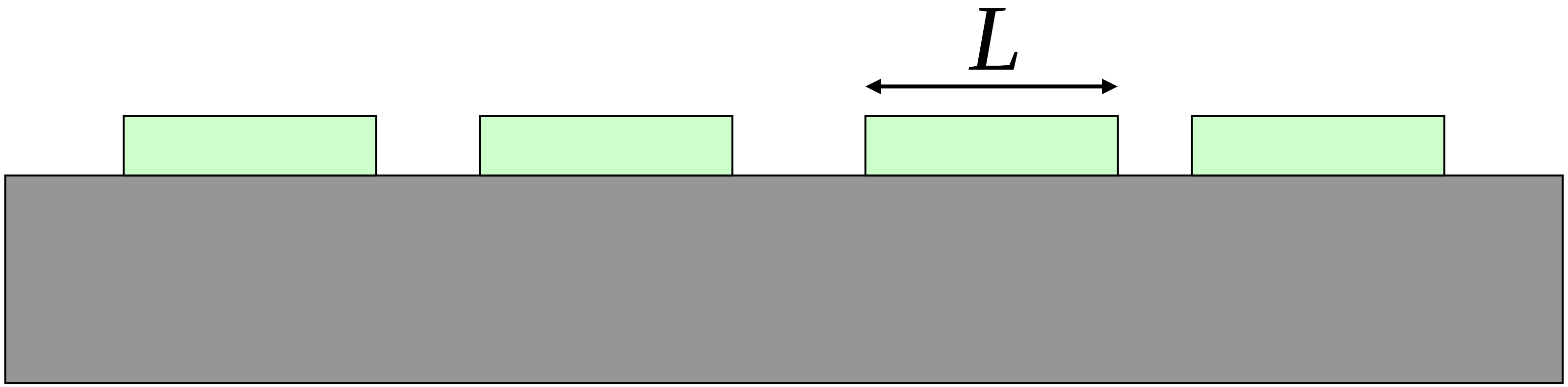
$$L \sim 1\mu m, \qquad T \sim 100mK$$



L. P. Levy, G. Dolan, J. Dunsmuir, H. Bouchiat, Phys. Rev. Lett. 64, 2074 (1990).

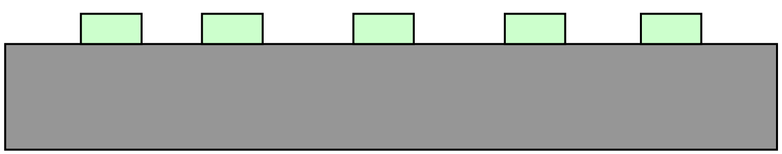
H. Bluhm, N. Koshnick, J. Bert, et al, Phys. Rev. Lett. 102, 136802 (2009).

A. C. Bleszynski-Jayich, W. E. Shanks, B. Peaudecerf, et al, Science 326, 272 (2009).

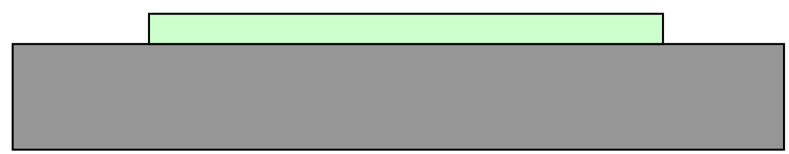


$$\varepsilon(\omega,q) = 1 + \frac{4\pi\nu_F D(\omega,q)}{-i\omega + D(\omega,q)q^2}$$

$$D(\omega,q) \propto -i\omega \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon(\omega,q) \;\in\; \mathrm{Re}$$



$L < L_{in}$



$L > L_{in}$